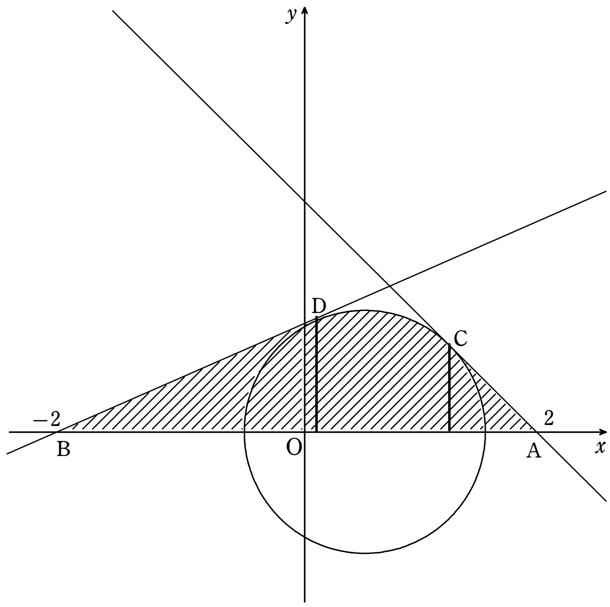
[ 東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{3}$ ]

☆────────────────────────☆

$-1<a<1$とする。2 点$\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$から半円$(x-a)^2+y^2=1,\ y\geqq 0$に 2 本の接線を引き，接点をそれぞれ$\mathrm{C},\ \mathrm{D}$とする。線分$\mathrm{AC}$，円弧$\mathrm{CD}$，線分$\mathrm{DB},\ \mathrm{BA}$で囲まれた図形を$x$軸のまわりに回転してできる立体の体積を$a$で表せ。

☆────────────────────────☆




接点を $\mathrm{T}(p,\ q)$ とすると，接線の方程式は $(p-a)(x-a)+qy=1$

これが $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を通るとき $(p-a)(2-a)=1$ より $p=a+\dfrac{1}{2-a}$

$\mathrm{B}(-2,\ 0)$ を通るとき $(p-a)(-2-a)=1$ より $p=a-\dfrac{1}{2+a}$

したがって $\mathrm{C}$ の $x$ 座標は $a+\dfrac{1}{2-a}$， $\mathrm{D}$ の $x$ 座標は $a-\dfrac{1}{2+a}$ である。

$(x-a)^2+y^2=1$ より $y^2=1-(x-a)^2$ であるから

$$y^2\Big|_{x=a+\frac{1}{2-a}}=1-\left(\frac{1}{2-a}\right)^2,\quad y^2\Big|_{x=a-\frac{1}{2+a}}=1-\left(\frac{1}{2+a}\right)^2 \text{ である。}$$

$\mathrm{AC}$を母線とする円錐の体積を$V_1$，$\mathrm{BD}$を母線とする円錐の体積を$V_2$，円弧$\mathrm{CD}$と$x$軸とで囲まれる図形を$x$軸のまわりに回転してできる立体の体積を$V_3$とおくと，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2-a}\right)^2\right\}\left\{2-\left(a+\frac{1}{2-a}\right)\right\}=\frac{1}{3}\pi\left\{2-a-\frac{2}{2-a}+\left(\frac{1}{2-a}\right)^3\right\}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2+a}\right)^2\right\}\left\{\left(a-\frac{1}{2+a}\right)-(-2)\right\}=\frac{1}{3}\pi\left\{2+a-\frac{2}{2+a}+\left(\frac{1}{2+a}\right)^3\right\}$$

$$V_3=\int_{a-\frac{1}{2+a}}^{a+\frac{1}{2-a}}\pi\left\{1-(x-a)^2\right\}dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{a-\frac{1}{2+a}}^{a+\frac{1}{2-a}}=\pi\left\{\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+a}\right)^3\right\}$$

よって求める体積$V$は

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{\pi}{3}\left(4+\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}\right)$$