[**東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{2}$**]

空間内の xy 平面上の直線 ℓ を楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=0$ の接線とする。直線 ℓ と点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$ を含む平面 π が z 軸と交わる点Qを $(0,\ 0,\ k)$ とするとき，k のとり得る値の範囲を求めよ。

xy 平面上の直線 ℓ が $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=0$ と $(\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$ （$0\leqq\theta<2\pi$）で接しているとする。

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に対し $2x+\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ より $y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$ であるから

ℓ の方程式は $y-2\sin\theta=-\dfrac{4\cos\theta}{2\sin\theta}(x-\cos\theta),\ z=0$

$$2\sin\theta\cdot y-4\sin^2\theta=-4\cos\theta\cdot x+4\cos^2\theta,\ z=0$$

$2\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y-2=0,\ z=0$ となる。これは $y=0$ のときにも成り立つ。

2 つの平面 $2\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y-2=0,\ z=0$ の交線を含む平面の方程式は

$(2\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y-2)+cz=0$ …① とおくことができる（ただし，平面 $z=0$ を除く。）

これが $\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$ を通るとき，$\cos\theta+\sin\theta-2+c=0$ より

$$c=2-(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=2-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $2-\sqrt{2}\leqq c\leqq 2+\sqrt{2}$ …② である。

①は $(0,\ 0,\ k)$ を通るから $2\cos\theta\cdot 0+\sin\theta\cdot 0-2+ck=0$

よって $k=\dfrac{2}{c}$

②より $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}\leqq k\leqq\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

したがって $2-\sqrt{2}\leqq k\leqq 2+\sqrt{2}$ となる。