[東京工業大学 1991 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

n を正の整数とする。10 進法で表した $n!$ について，1 の位から 10^{m-1} の位までの数字がすべて 0 で，10^m の位の数字が 0 でないとき，関数 $f(n)$ の値を m とする。このとき，次の値を求めよ。

(1) $f(10)$, $f(100)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(10^n)}{10^n}$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $10! = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$= 3628800$

よって $f(10)=2$

一般に，m は $n!$ が「10 で割り切れる回数」である。

「10 で割り切れる」⇔「2 でも 5 でも割り切れる」

であるが，$n!$ が 2 で割れる回数と 5 で割れる回数を比べると

2 で割れる回数の方が 5 で割れる回数よりも十分に多いので,

5 で割れる回数がそのまま 10 で割れる回数と一致する。

100! について考えると，1 から 100 までの整数で 5 の倍数は 20 個，25 の倍数は 4 個ある。

よって，100! は 5 で 20＋4＝24 回割り切れる。

したがって $f(100)=24$

(2) (1)での考察の通り，m は $n!$ の素因数分解における 5 の指数に等しい。

よって，a 以下の最大の整数を $[a]$ とすると

$$m=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{5^k}\right]$$ （ただし，k は $5^k \leqq n,\ 5^{k+1}>n$ を満たす整数）

となる。

よって，n を 10^n で置き換えると，$\left[\dfrac{10^n}{5^k}\right]$ は必ず整数であり，次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{10^n}{5^k} \leqq f(10^n) \leqq \frac{10^n}{5}+\frac{10^n}{5^2}+\cdots$$

辺々を10^nで割って

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k} \leqq \frac{f(10^n)}{10^n} \leqq \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

ここで，$n\to\infty$ とすると，左辺，右辺ともに，$\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}$ に収束する。

よってはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(10^n)}{10^n}=\frac{1}{4}$