

[東京工業大学 1990 年後期 1]



$(x+1)(x-2)$ の小数第 1 位を四捨五入したものが $1+5x$ と等しくなるような実数 x を求めよ。



題意の条件より $(1+5x) - \frac{1}{2} \leq (x+1)(x-2) < (1+5x) + \frac{1}{2}$

すなわち $5x + \frac{1}{2} \leq (x+1)(x-2) < 5x + \frac{3}{2}$

$5x$ が整数だから $x = \frac{n}{5}$ (n は整数) とおくことができる

$$n + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{n}{5} + 1\right) \left(\frac{n}{5} - 2\right) \leq n + \frac{3}{2} \Leftrightarrow n + \frac{1}{2} \leq \left(\frac{n}{5} + 1\right) \left(\frac{n}{5} - 2\right) \leq n + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 50n + 25 \leq 2(n+5)(n-10) \leq 50n + 75$$

$$\Leftrightarrow 125 \leq 2n^2 - 60n \leq 175$$

$$\Leftrightarrow 575 \leq 2(n-15)^2 \leq 625$$

$$\Leftrightarrow \frac{575}{2} \leq (n-15)^2 \leq \frac{625}{2}$$

$$\Leftrightarrow 287.5 \leq (n-15)^2 \leq 312.5 \text{ となる。}$$

$16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$ であるから $n-15 = \pm 17$

よって $n = -2, 32$

したがって $x = -\frac{2}{5}, \frac{32}{5}$

[注] 問題文では負の数の四捨五入についての定義が明確でないが、

$$\text{「実数 } x \text{ を小数第 1 位で四捨五入したら整数 } n \text{ になる」} \Leftrightarrow n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$$

として考えた。



n を 2 以上の整数とする。

- (1) $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ ですべての実数 θ に対して

$$\sin(2n\theta) = n \sin(2\theta) P_n(\sin^2 \theta)$$

$$\cos(2n\theta) = Q_n(\sin^2 \theta)$$

を満たすものが存在することを帰納法を用いて表せ。

- (2) $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $\alpha_k = \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right)^{-2}$ とおくと,

$P_n(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \cdots (1 - \alpha_{n-1} x)$ となることを示せ。

- (3) $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = \frac{2n^2 - 2}{3}$ を示せ。



- (1) $n = 2$ のとき

$$\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta = 2 \sin 2\theta (1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$\cos 4\theta = 1 - 2 \sin^2 2\theta = 1 - 2(2 \sin \theta \cos \theta)^2 = 1 - 8 \{ \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \} = 1 - 8 \sin^2 \theta + 8 (\sin^2 \theta)^2$$

より $P_2(x) = 1 - 2x$, $Q_2(x) = 1 - 8x + 8x^2$ とおけば題意を満たす。

- (2) $\sin 2n\theta = (n \sin 2\theta)(P_n(\sin^2 \theta)) \cdots \textcircled{1}$, $\cos(2n\theta) = Q_n(\sin^2 \theta) \cdots \textcircled{2}$ とおく。

$n = k$ ($k \geq 2$) のとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を満たす多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在すると仮定する。

このとき,

$$\begin{aligned} & \sin 2(k+1)\theta \\ &= \sin 2k\theta \cos 2\theta + \cos 2k\theta \sin 2\theta \\ &= k(\sin 2\theta)(P_k(\sin^2 \theta)) \cos 2\theta + Q_k(\sin^2 \theta) \sin 2\theta \\ &= k(\sin 2\theta)(P_k(\sin^2 \theta)) \cos 2\theta + Q_k(\sin^2 \theta) \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k+1)(\sin 2\theta)(P_k(\sin^2 \theta))\cos 2\theta - (\sin 2\theta)(P_k(\sin^2 \theta))(1 - \sin^2 \theta) + Q_k(\sin^2 \theta)\sin 2\theta \\
&= (k+1)(\sin 2\theta)\left\{ (P_k(\sin^2 \theta))\cos 2\theta - \frac{1}{k+1}(P_k(\sin^2 \theta))(1 - \sin^2 \theta) + \frac{1}{k+1}Q_k(\sin^2 \theta) \right\} \\
&= (k+1)(\sin 2\theta)\left\{ \frac{k}{k+1}(P_k(\sin^2 \theta))(1 - \sin^2 \theta) + \frac{1}{k+1}Q_k(\sin^2 \theta) \right\} \cdots \textcircled{3}
\end{aligned}$$

③において $P_{k+1}(x) = \frac{k}{k+1}P_k(x)(1-2x) + \frac{1}{k+1}Q_k(x)$ とおく。

$P_{k+1}(x)$ の次数について考える。

(i) $P_{k+1}(x)$ の最高次の項の係数は $P_k(x)$ の最高次の項に $\frac{-2}{k+1}$ (< 0) をかけたものと

$Q_k(x)$ の最高次の項に $\frac{1}{k+1}$ (> 0) をかけたものの和となる

(ii) $P_2(x)$ と $Q_2(x)$ の最高次の項の係数の符号が異なる

(i), (ii)より帰納的に $P_{k+1}(x)$ には k 次の項が存在し, k 次式となる。

また, $\cos 2(k+1)\theta$

$$\begin{aligned}
&= \cos 2k\theta \cos 2\theta - \sin 2k\theta \sin 2\theta \\
&= Q_k(\sin^2 \theta)\cos 2\theta - (k \sin 2\theta)(P_k(\sin^2 \theta))\sin 2\theta \\
&= Q_k(\sin^2 \theta)(1 - 2\sin^2 \theta) - 4k \sin^2 \theta \cos^2 \theta (P_k(\sin^2 \theta)) \\
&= Q_k(\sin^2 \theta)(1 - 2\sin^2 \theta) - 4k \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)(P_k(\sin^2 \theta)) \cdots \textcircled{4}
\end{aligned}$$

④において $Q_{k+1}(x) = Q_k(x)(1-2x) - 4kx(1-x)P_k(x)$ とおく。

$Q_{k+1}(x)$ の次数について考える。

(i) $Q_{k+1}(x)$ の最高次の項の係数は $Q_k(x)$ の最高次の項に -2 (< 0) をかけたものと

$P_k(x)$ の最高次の項に $4k$ (> 0) をかけたものの和となる

(ii) $P_2(x)$ と $Q_2(x)$ の最高次の項の係数の符号が異なる

(i), (ii)より帰納的に $Q_{k+1}(x)$ には $k+1$ 次の項が存在し, $k+1$ 次式となる。

以上より $n = k+1$ のときも①, ②を満たす多項式 $P_n(x), Q_n(x)$ が存在する。

数学的帰納法により, 題意は示された。

(2) ①において $\theta = \frac{k}{2n}\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots, n-1$) とおくと

$$\sin 2n \cdot \frac{k}{2n}\pi = \left(n \sin 2 \cdot \frac{k}{2n}\pi \right) P_n \left(\sin^2 \frac{k}{2n}\pi \right) \Leftrightarrow \sin k\pi = \left(n \sin \frac{k}{n}\pi \right) P_n \left(\sin^2 \frac{k}{2n}\pi \right)$$

$$\sin k\pi = 0, \quad \sin \frac{k}{n}\pi \neq 0 \quad \text{より} \quad P_n \left(\sin^2 \frac{k}{2n}\pi \right) = 0$$

よって $P_n \left(\sin^2 \frac{k}{2n}\pi \right) = P_n \left(\frac{1}{\alpha_k} \right) = 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n-1$) が成り立つ。

したがって $P_n(x) = a(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ (a : 定数) と表せる。

ここで, $x=0$ のとき $P_2(0)=1, Q_2(0)=1$ であり,

$$P_{k+1}(0) = \frac{k}{k+1}P_k(0) + \frac{1}{k+1}Q_k(0) \quad \text{より帰納的に} \quad P_n(0) = 1$$

よって $a=1$ となるので,

$$P_n(x) = (1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x) \quad \text{となって題意は示された。}$$

$$(3) P_{n+1}(x) = \frac{n}{n+1}P_n(x)(1-2x) + \frac{1}{n+1}Q_n(x) \quad \cdots\text{⑤}$$

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x)(1-2x) - 4nx(1-x)P_n(x) \quad \cdots\text{⑥}$$

⑤より $Q_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - nP_n(x)(1-2x)$ となるので, ⑥に代入すると

$$(n+2)P_{n+2}(x) - (n+1)P_{n+1}(x)(1-2x) = \{(n+1)P_{n+1}(x) - nP_n(x)(1-2x)\}(1-2x) - 4nx(1-x)P_n(x)$$

$$(n+2)P_{n+2}(x) = 2(n+1)P_{n+1}(x)(1-2x) - nP_n(x)(1-2x)^2 - 4nx(1-x)$$

$$(n+2)P_{n+2}(x) = 2(n+1)P_{n+1}(x)(1-2x) - nP_n(x)\{(1-2x)^2 + 4x(1-x)\}$$

$$(n+2)P_{n+2}(x) = 2(n+1)P_{n+1}(x)(1-2x) - nP_n(x) \quad \cdots\text{⑦}$$

という $P_n(x)$ の 3 項間漸化式を得る。

$n \geq 2$ に対して

$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$ は $P_n(x) = (1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ の展開式の x の係数を -1 倍したものである。

よって、 $P_n(x) = 1 - s_n x + \dots$ とし、 $s_n = \frac{2n^2 - 2}{3}$ となることを示せばよい。

⑦において x の係数を比較すると $(n+2)s_{n+2} = 2(n+1)s_{n+1} + 4(n+1) - ns_n$

$$P_2(x) = 1 - 2x \quad \text{より} \quad s_2 = 2$$

$$P_3(x) = \frac{2}{3}P_2(x)(1-2x) + \frac{1}{3}Q_2(x) = \frac{2}{3}(1-2x)(1-2x) + \frac{1}{3}(1-8x+8x^2) = \frac{16}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 1$$

$$\text{より} \quad s_3 = \frac{16}{3}$$

$$ns_n = t_n \quad \text{とおくと} \quad t_{n+2} = 2t_{n+1} - t_n + 4(n+1) \Leftrightarrow t_{n+2} - t_{n+1} = t_{n+1} - t_n + 4(n+1)$$

$$t_2 = 2s_2 = 4, \quad t_3 = 3s_3 = 16 \quad \text{であり,}$$

$$u_n = t_{n+1} - t_n \quad \text{とおくと} \quad u_{n+1} = u_n + 4(n+1), \quad u_2 = t_3 - t_2 = 16 - 4 = 12$$

$$\begin{aligned} \text{よって } n \geq 3 \text{ に対し } u_n &= u_2 + \sum_{k=2}^{n-1} 4(k+1) \\ &= u_2 + 4 \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - 1 \right) + 4 \sum_{k=2}^{n-1} 1 \\ &= 12 + 4 \left\{ \frac{(n-1)n}{2} - 1 \right\} + 4(n-2) \\ &= 2n^2 + 2n \\ &= 2n(n+1) \end{aligned}$$

これは $n=2$ のときも成り立っている。

したがって、 $t_{n+1} - t_n = 2n(n+1)$ より

$$\begin{aligned} n \geq 3 \text{ に対し } t_n &= t_2 + \sum_{k=2}^{n-1} 2k(k+1) \\ &= 4 + \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{n-1} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= 4 + \frac{2}{3} \{(n-1)n(n+1) - 6\} \\ &= \frac{2}{3}(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

これは $n=2$ のときも成り立っている。

$$\text{以上より} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = s_n = \frac{t_n}{n} = \frac{2n^2 - 2}{3}$$

となる。