[東京工業大学 1990 年後期 $\boxed{2}$]

n を 2 以上の整数とする。

(1) $n-1$ 次多項式 $\mathrm{P}_n(x)$ と n 次多項式 $\mathrm{Q}_n(x)$ ですべての実数 θ に対して

$$\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)\mathrm{P}_n(\sin^2\theta)$$

$$\cos(2n\theta)=\mathrm{Q}_n(\sin^2\theta)$$

を満たすものが存在することを帰納法を用いて表せ。

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して $\alpha_k=\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$ とおくと，

$\mathrm{P}_n(x)=(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ となることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ。

(1) $n=2$ のとき

$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta=2\sin 2\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)$

$\cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta=1-2\left(2\sin\theta\cos\theta\right)^2=1-8\left\{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\right\}=1-8\sin^2\theta+8\left(\sin^2\theta\right)^2$

より $\mathrm{P}_2(x)=1-2x,\ \mathrm{Q}_2(x)=1-8x+8x^2$ とおけば題意を満たす。

(2) $\sin 2n\theta=\left(n\sin 2\theta\right)\left(\mathrm{P}_n(\sin^2\theta)\right)$ …①，$\cos(2n\theta)=\mathrm{Q}_n(\sin^2\theta)$ …② とおく。

$n=k\ (k\geqq 2)$ のとき，①，②を満たす多項式 $\mathrm{P}_n(x),\ \mathrm{Q}_n(x)$ が存在すると仮定する。

このとき，

$\sin 2(k+1)\theta$

$=\sin 2k\theta\cos 2\theta+\cos 2k\theta\sin 2\theta$

$=k\left(\sin 2\theta\right)\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\cos 2\theta+\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\sin 2\theta$

$=k\left(\sin 2\theta\right)\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\cos 2\theta+\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\sin 2\theta$

$$=(k+1)\left(\sin 2\theta\right)\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\cos 2\theta-\left(\sin 2\theta\right)\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\left(1-\sin^2\theta\right)+\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\sin 2\theta$$

$$=(k+1)\left(\sin 2\theta\right)\left\{\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\cos 2\theta-\frac{1}{k+1}\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\left(1-\sin^2\theta\right)+\frac{1}{k+1}\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\right\}$$

$$=(k+1)\left(\sin 2\theta\right)\left\{\frac{k}{k+1}\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\left(1-\sin^2\theta\right)+\frac{1}{k+1}\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\right\}\cdots③$$

③において $\mathrm{P}_{k+1}(x)=\dfrac{k}{k+1}\mathrm{P}_k(x)(1-2x)+\dfrac{1}{k+1}\mathrm{Q}_k(x)$ とおく。

$\mathrm{P}_{k+1}(x)$ の次数について考える。

（ｉ）$\mathrm{P}_{k+1}(x)$ の最高次の項の係数は $\mathrm{P}_k(x)$ の最高次の項に $\dfrac{-2}{k+1}$ (<0) をかけたものと

$\mathrm{Q}_k(x)$ の最高次の項に $\dfrac{1}{k+1}$ (>0) をかけたものの和となる

（ⅱ）$\mathrm{P}_2(x)$ と $\mathrm{Q}_2(x)$ の最高次の項の係数の符号が異なる

（ｉ），（ⅱ）より帰納的に $\mathrm{P}_{k+1}(x)$ には k 次の項が存在し，k 次式となる。

また，$\cos 2(k+1)\theta$

$$=\cos 2k\theta\cos 2\theta-\sin 2k\theta\sin 2\theta$$

$$=\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\cos 2\theta-\left(k\sin 2\theta\right)\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\sin 2\theta$$

$$=\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\left(1-2\sin^2\theta\right)-4k\sin^2\theta\cos^2\theta\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)$$

$$=\mathrm{Q}_k(\sin^2\theta)\left(1-2\sin^2\theta\right)-4k\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\left(\mathrm{P}_k(\sin^2\theta)\right)\quad\cdots④$$

④において $\mathrm{Q}_{k+1}(x)=\mathrm{Q}_k(x)\left(1-2x\right)-4kx(1-x)\mathrm{P}_k(x)$ とおく。

$\mathrm{Q}_{k+1}(x)$ の次数について考える。

（ｉ）$\mathrm{Q}_{k+1}(x)$ の最高次の項の係数は $\mathrm{Q}_k(x)$ の最高次の項に -2 (<0) をかけたものと

$\mathrm{P}_k(x)$ の最高次の項に $4k$ (>0) をかけたものの和となる

（ⅱ）$\mathrm{P}_2(x)$ と $\mathrm{Q}_2(x)$ の最高次の項の係数の符号が異なる

（ｉ），（ⅱ）より帰納的に $\mathrm{Q}_{k+1}(x)$ には $k+1$ 次の項が存在し，$k+1$ 次式となる。

以上より $n=k+1$ のときも①，②を満たす多項式 $\mathrm{P}_n(x),\ \mathrm{Q}_n(x)$ が存在する。

数学的帰納法により，題意は示された。

(2) ①において $\theta=\dfrac{k}{2n}\pi \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ とおくと

$$\sin 2n\cdot\frac{k}{2n}\pi=\left(n\sin 2\cdot\frac{k}{2n}\pi\right)\mathrm{P}_n\left(\sin^2\frac{k}{2n}\pi\right) \Leftrightarrow \sin k\pi=\left(n\sin\frac{k}{n}\pi\right)\mathrm{P}_n\left(\sin^2\frac{k}{2n}\pi\right)$$

$\sin k\pi=0$, $\sin\dfrac{k}{n}\pi\neq 0$ より $\mathrm{P}_n\left(\sin^2\dfrac{k}{2n}\pi\right)=0$

よって $\mathrm{P}_n\left(\sin^2\dfrac{k}{2n}\pi\right)=\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{\alpha_k}\right)=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ が成り立つ。

したがって $\mathrm{P}_n(x)=a(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ （a ：定数）と表せる。

ここで，$x=0$ のとき $\mathrm{P}_2(0)=1$，$\mathrm{Q}_2(0)=1$ であり，

$\mathrm{P}_{k+1}(0)=\dfrac{k}{k+1}\mathrm{P}_k(0)+\dfrac{1}{k+1}\mathrm{Q}_k(0)$ より帰納的に $\mathrm{P}_n(0)=1$

よって $a=1$ となるので，

$\mathrm{P}_n(x)=(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ となって題意は示された。

(3) $\mathrm{P}_{n+1}(x)=\dfrac{n}{n+1}\mathrm{P}_n(x)(1-2x)+\dfrac{1}{n+1}\mathrm{Q}_n(x) \quad \cdots⑤$

$\mathrm{Q}_{n+1}(x)=\mathrm{Q}_n(x)(1-2x)-4nx(1-x)\mathrm{P}_n(x) \quad \cdots⑥$

⑤より $\mathrm{Q}_n(x)=(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)-n\mathrm{P}_n(x)(1-2x)$ となるので，⑥に代入すると

$$(n+2)\mathrm{P}_{n+2}(x)-(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)(1-2x)=\left\{(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)-n\mathrm{P}_n(x)(1-2x)\right\}(1-2x)-4nx(1-x)\mathrm{P}_n(x)$$

$$(n+2)\mathrm{P}_{n+2}(x)=2(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)(1-2x)-n\mathrm{P}_n(x)(1-2x)^2-4nx(1-x)$$

$$(n+2)\mathrm{P}_{n+2}(x)=2(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)(1-2x)-n\mathrm{P}_n(x)\left\{(1-2x)^2+4x(1-x)\right\}$$

$$(n+2)\mathrm{P}_{n+2}(x)=2(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)(1-2x)-n\mathrm{P}_n(x) \quad \cdots⑦$$

という $\mathrm{P}_n(x)$ の 3 項間漸化式を得る。

$n\geqq 2$ に対して

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$ は $\mathrm{P}_n(x)=(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ の展開式の x の係数を -1 倍したものである。

よって，$\mathrm{P}_n(x)=1-s_nx+\cdots$ とし，$s_n=\dfrac{2n^2-2}{3}$ となることを示せばよい。

⑦において x の係数を比較すると $(n+2)s_{n+2}=2(n+1)s_{n+1}+4(n+1)-ns_n$

$\mathrm{P}_2(x)=1-2x$ より $s_2=2$

$$\mathrm{P}_3(x)=\frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)(1-2x)+\frac{1}{3}\mathrm{Q}_2(x)=\frac{2}{3}(1-2x)(1-2x)+\frac{1}{3}(1-8x+8x^2)=\frac{16}{3}x^2-\frac{16}{3}x+1$$

より $s_3=\dfrac{16}{3}$

$ns_n=t_n$ とおくと $t_{n+2}=2t_{n+1}-t_n+4(n+1) \Leftrightarrow t_{n+2}-t_{n+1}=t_{n+1}-t_n+4(n+1)$

$t_2=2s_2=4$，$t_3=3s_3=16$ であり，

$u_n=t_{n+1}-t_n$ とおくと $u_{n+1}=u_n+4(n+1)$，$u_2=t_3-t_2=16-4=12$

よって $n\geqq 3$ に対し
$$\begin{aligned}
u_n&=u_2+\sum_{k=2}^{n-1}4(k+1)\\
&=u_2+4\left(\sum_{k=1}^{n-1}k-1\right)+4\sum_{k=2}^{n-1}1\\
&=12+4\left\{\frac{(n-1)n}{2}-1\right\}+4(n-2)\\
&=2n^2+2n\\
&=2n(n+1)
\end{aligned}$$

これは $n=2$ のときも成り立っている。

したがって，$t_{n+1}-t_n=2n(n+1)$ より

$n\geqq 3$ に対し
$$\begin{aligned}
t_n&=t_2+\sum_{k=2}^{n-1}2k(k+1)\\
&=4+\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n-1}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\
&=4+\frac{2}{3}\{(n-1)n(n+1)-6\}\\
&=\frac{2}{3}(n-1)n(n+1)
\end{aligned}$$

これは $n=2$ のときも成り立っている。

以上より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=s_n=\frac{t_n}{n}=\frac{2n^2-2}{3}$

となる。