[東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{1}$]

$x,\ y,\ z,\ w$ を正数とする。任意の整数 $m,\ n$ に対して

$$\left(x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{m}}\right)^n+\left(z^{\frac{1}{m}}+w^{\frac{1}{m}}\right)^n=\left\{\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ。

$$\left(x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{m}}\right)^n+\left(z^{\frac{1}{m}}+w^{\frac{1}{m}}\right)^n=\left\{\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n \quad \cdots（*）$$

（*）が任意の整数 $m,\ n$ に対して成り立つので $m=1,\ n=2$ に対しても成り立つから

$$(x+y)^2+(z+w)^2=\left\{\left(x^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(y^2+w^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

$$x^2+2xy+y^2+z^2+2zw+w^2=x^2+z^2+2\left(x^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(y^2+w^2\right)^{\frac{1}{2}}+y^2+w^2$$

$$xy+zw=\left(x^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(y^2+w^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2 乗して

$$(xy+zw)^2=\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+w^2\right)$$

$$x^2y^2+2xyzw+z^2w^2=x^2y^2+x^2w^2+z^2y^2+z^2w^2$$

$$(xw-yz)^2=0$$

よって $xw=yz$ であることが必要条件である。

次に，これが十分条件でもあることを示す。

$x,\ y,\ z,\ w$ は正数なので， $y=kx,\ w=kz\ \ (k>0)$ とおくことができる。

このとき，

$$（（*）の左辺）=\left(x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{m}}\right)^n+\left(z^{\frac{1}{m}}+w^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

$$=\left(x^{\frac{1}{m}}+k^{\frac{1}{m}}x^{\frac{1}{m}}\right)^{n}+\left(z^{\frac{1}{m}}+k^{\frac{1}{m}}z^{\frac{1}{m}}\right)^{n}$$

$$=\left(1+k^{\frac{1}{m}}\right)^{n}\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)$$

（（＊）の右辺）$=\left\{\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(k^{\frac{n}{m}}x^{\frac{n}{m}}+k^{\frac{n}{m}}z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n}$

$$=\left\{\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}+k^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n}$$

$$=\left\{\left(1+k^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n}$$

$$=\left(1+k^{\frac{1}{m}}\right)^{n}\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)$$

となり，（＊）は任意の正の整数 m, n に対して成り立つ。

よって，求める必要十分条件は $xw=zy$

［ 東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{2}$ ］

$x_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を正数とし， $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ を満たすとする。

このとき不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log \frac{k}{n}$ を証明せよ。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - k\log\frac{k}{n} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{k}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\log x_i - \log\frac{k}{n}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{nx_i}{k} \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで， $\log x \geqq 1-\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$ であることを示す。

$f(x)=\log x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$ より $f(x)$ は $0<x<1$ で減少， $x>1$ で増加する。

よって， $f(x)$ の最小値は $f(1)=\log 1-\left(1-\dfrac{1}{1}\right)=0$

したがって $\log x \geqq 1-\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$ …② が成り立つ。

①に②を適用すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{nx_i}{k} &\geqq \sum_{i=1}^{n} x_i\left(1-\frac{k}{nx_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{k}{n}\right)\\ &= k-n\cdot\frac{k}{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

よって，不等式は示された。

[東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{3}$]

xy 平面において，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の周上で $y \geqq 0$ の部分を L とする。
また 2 つの円 $(x-1)^2+y^2=1$, $(x+1)^2+y^2=1$ の周上で $y \leqq 0$ の部分を M, N とする。このとき，L, M, N 上の動点 P, Q, R に対し線分 PQ と PR の長さの和の最大値を求めよ。

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点を $\mathrm{F}(1,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$ とすると，楕円の定義から

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=4$ …①

また，三角不等式から $\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{PF}+\mathrm{FQ}$，$\mathrm{PR} \leqq \mathrm{PF}'+\mathrm{F}'\mathrm{R}$

F, F' は 2 つの円の中心であることから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}+\mathrm{PR} &\leqq \mathrm{PF}+\mathrm{FQ}+\mathrm{PF}'+\mathrm{F}'\mathrm{R}\\ &=\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'+\mathrm{FQ}+\mathrm{F}'\mathrm{R}\\ &=4+2\\ &=6\end{aligned}$$

等号が成り立つのは，PQ, PR がそれぞれ F, F' を通るときである。

したがって，求める最大値は 6

[東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$ の最小値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$ を微分すると

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos x}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{\pi}{4}$ で，この前後で負から正に変化するので，

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小かつ最小となる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

であり，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおくと $d\alpha=-d\theta$，$\theta:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\alpha:\dfrac{\pi}{4}\to 0$ より

求める最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\Big[-\log|1-\sin\theta|+\log|1+\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

[**東京工業大学 1990 年前期** $\boxed{5}$]

☆ ☆

xy 平面上の楕円 $3x^2+y^2=1$ の外にある点 P からこの楕円に 2 本の接線を引く。その接点を $\mathrm{Q, R}$ とし，Q と R によって分けられた楕円の 2 つの弧のうち P に近い方を $\overset{\frown}{\mathrm{QR}}$ とする。このとき，次の 2 つの条件

（i）$\overset{\frown}{\mathrm{QR}}$ は点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ を含む。

（ii）$\angle\mathrm{QPR} \geqq 90^\circ$

を満たすような P の存在範囲を図示し，その面積を求めよ。

☆ ☆

$3x^2+y^2=1$ …①

$\mathrm{P}(a,\ b)$ とおく。P は楕円①の外側にあることから $3a^2+b^2>1$ …②

さらに条件(i)より $a \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であることが必要。

$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ を除く $-1 \leqq b \leqq 1$ の範囲に P があればよい。

$a>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，P を通る接線のベクトル方程式を $(x,\ y)=(a,\ b)+t(1,\ m)$ （t は実数）とおく。

$x=a+t$，$y=b+mt$ を①に代入して $3(a+t)^2+(b+mt)^2=1$

$$\Leftrightarrow\ (3+m^2)t^2+(6a+2bm)t+3a^2+b^2-1=0$$

この t の 2 次方程式が重解をもつ条件は $(3a+bm)^2-(3+m^2)(3a^2+b^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow\ (-3a^2+1)m^2+6abm+3(-b^2+1)=0 \quad \cdots③$$

この m の 2 次方程式の判別式は $(3ab)^2-(-3a^2+1)\left\{3(-b^2+1)\right\}=9a^2b^2-9a^2b^2+9a^2+3b^2-3$

$$=3(3a^2+b^2-1)>0 \quad (\because\ ②)$$

よって，③は相異なる 2 つの実数解をもち，それらを $m_1,\ m_2$ とする。

解と係数の関係より $m_1m_2=\dfrac{3(-b^2+1)}{-3a^2+1}$ …④

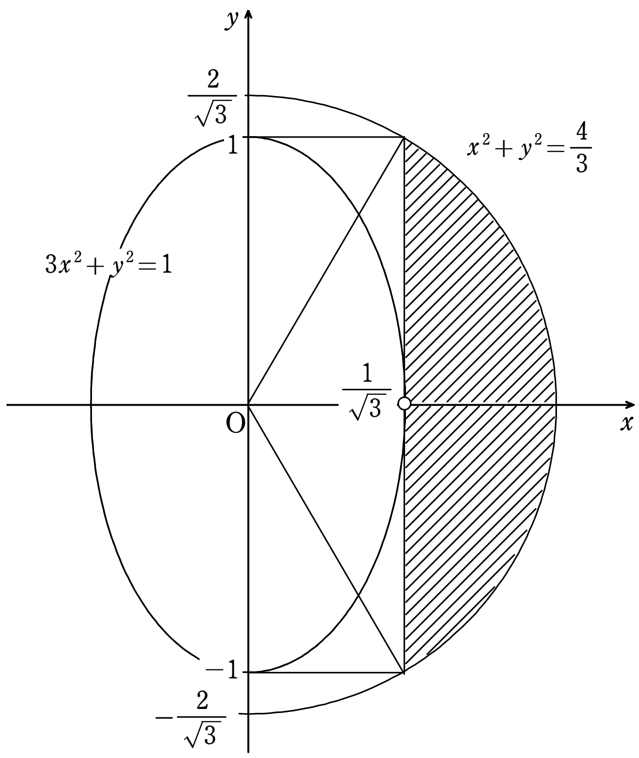
ここで，条件(ⅱ)より，ベクトルの内積の関係から $(1,\ m_1)\cdot(1,\ m_2)\leqq 0$

$$1+m_1m_2\leqq 0$$

したがって④より $1+\dfrac{3(-b^2+1)}{-3a^2+1}\leqq 0$

$a\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に注意して $-3a^2+1+3(-b^2+1)\geqq 0$ より $a^2+b^2\leqq\dfrac{4}{3}$

よって，点P の存在範囲は図の斜線部で，境界は点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$を除いてすべて含む。



$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$ より求める面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$$

となる。