

[東京工業大学 1990 年前期 1]



x, y, z, w を正数とする。任意の整数 m, n に対して

$$\left(x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{m}}\right)^n + \left(z^{\frac{1}{m}} + w^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left\{ \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(y^{\frac{n}{m}} + w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ。



[東京工業大学 1990 年前期 2]



$x_i (i=1, 2, \dots, n)$ を正数とし, $\sum_{i=1}^n x_i = k$ を満たすとする。

このとき不等式 $\sum_{i=1}^n x_i \log x_i \geq k \log \frac{k}{n}$ を証明せよ。



[東京工業大学 1990 年前期 3]



xy 平面において、楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ の周上で $y \geq 0$ の部分を L とする。

また 2 つの円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x+1)^2 + y^2 = 1$ の周上で $y \geq 0$ の部分を M, N とする。このとき、 L, M, N 上の動点 P, Q, R に対し線分 PQ と PR の長さの和の最大値を求めよ。



[東京工業大学 1990 年前期 4]



$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x) = \int_0^x \frac{d\theta}{\cos \theta} + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta}$ の最小値を求めよ。





xy 平面上の楕円 $3x^2 + y^2 = 1$ の外にある点 P からこの楕円に 2 本の接線を引く。その接点を Q, R とし, Q と R によって分けられた楕円の 2 つの弧のうち P に近い方を \widehat{QR} とする。このとき, 次の 2 つの条件

() \widehat{QR} は点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ を含む。

() $\angle QPR = 90^\circ$

を満たすような P の存在範囲を図示し, その面積を求めよ。

