[ **東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{5}$** ]

$xy$ 平面上の楕円 $3x^2+y^2=1$ の外にある点 P からこの楕円に 2 本の接線を引く。その接点を Q, R とし，Q と R によって分けられた楕円の 2 つの弧のうち P に近い方を $\overset{\frown}{\mathrm{QR}}$ とする。このとき，次の 2 つの条件

（ｉ）$\overset{\frown}{\mathrm{QR}}$ は点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ を含む。

（ii）$\angle\mathrm{QPR} \geqq 90^\circ$

を満たすような P の存在範囲を図示し，その面積を求めよ。

$3x^2+y^2=1$ …①

$\mathrm{P}(a,\ b)$ とおく。P は楕円①の外側にあることから $3a^2+b^2>1$ …②

さらに条件(ｉ)より $a \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であることが必要。

$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ を除く $-1 \leqq b \leqq 1$ の範囲に P があればよい。

$a>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，P を通る接線のベクトル方程式を $(x,\ y)=(a,\ b)+t(1,\ m)$ （$t$ は実数）とおく。

$x=a+t$，$y=b+mt$ を①に代入して $3(a+t)^2+(b+mt)^2=1$

$$\Leftrightarrow\ (3+m^2)t^2+(6a+2bm)t+3a^2+b^2-1=0$$

この $t$ の 2 次方程式が重解をもつ条件は $(3a+bm)^2-(3+m^2)(3a^2+b^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow\ (-3a^2+1)m^2+6abm+3(-b^2+1)=0 \quad \cdots ③$$

この $m$ の 2 次方程式の判別式は $(3ab)^2-(-3a^2+1)\left\{3(-b^2+1)\right\}=9a^2b^2-9a^2b^2+9a^2+3b^2-3$

$$=3(3a^2+b^2-1)>0 \quad (\because\ ②)$$

よって，③は相異なる 2 つの実数解をもち，それらを $m_1,\ m_2$ とする。

解と係数の関係より $m_1m_2=\dfrac{3(-b^2+1)}{-3a^2+1}$ …④

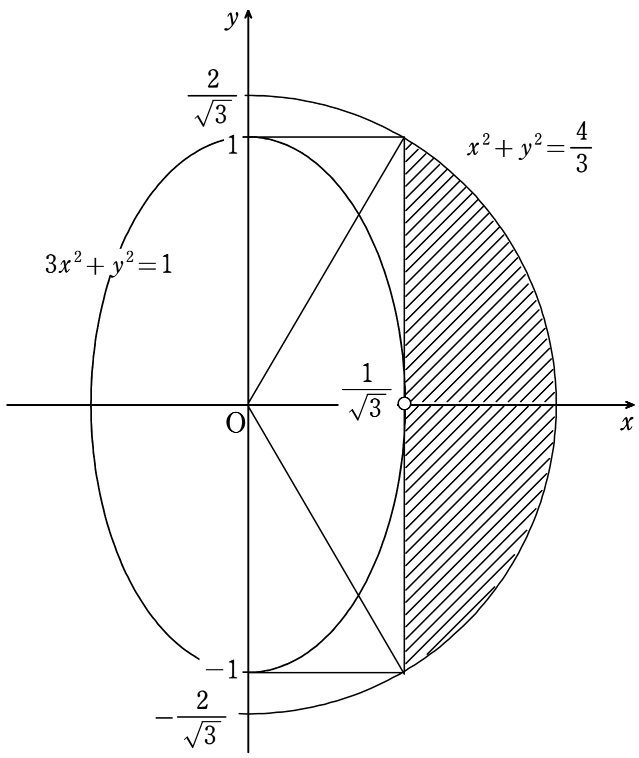
ここで，条件(ⅱ)より，ベクトルの内積の関係から $(1,\ m_1)\cdot(1,\ m_2)\leqq 0$

$$1+m_1m_2\leqq 0$$

したがって④より $1+\dfrac{3(-b^2+1)}{-3a^2+1}\leqq 0$

$a\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に注意して $-3a^2+1+3(-b^2+1)\geqq 0$ より $a^2+b^2\leqq\dfrac{4}{3}$

よって，点Pの存在範囲は図の斜線部で，境界は点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$を除いてすべて含む。




$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$ より求める面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$$

となる。