[東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$ の最小値を求めよ。

☆ ☆

$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$ を微分すると

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos x}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{\pi}{4}$ で，この前後で負から正に変化するので，

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小かつ最小となる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

であり，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおくと $d\alpha=-d\theta$，$\theta:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\alpha:\dfrac{\pi}{4}\to 0$ より

求める最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\Big[-\log|1-\sin\theta|+\log|1+\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$