[東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{3}$]

☆―――☆

xy 平面において，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の周上で $y \geqq 0$ の部分を L とする。

また 2 つの円 $(x-1)^2+y^2=1$, $(x+1)^2+y^2=1$ の周上で $y \leqq 0$ の部分を M, N とする。このとき，

L, M, N 上の動点 P, Q, R に対し線分 PQ と PR の長さの和の最大値を求めよ。

☆―――☆

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点を $\mathrm{F}(1,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$ とすると，楕円の定義から

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=4$ …①

また，三角不等式から $\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{PF}+\mathrm{FQ}$， $\mathrm{PR} \leqq \mathrm{PF}'+\mathrm{F}'\mathrm{R}$

F, F' は 2 つの円の中心であることから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}+\mathrm{PR} &\leqq \mathrm{PF}+\mathrm{FQ}+\mathrm{PF}'+\mathrm{F}'\mathrm{R} \\
&= \mathrm{PF}+\mathrm{PF}'+\mathrm{FQ}+\mathrm{F}'\mathrm{R} \\
&= 4+2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

等号が成り立つのは， PQ, PR がそれぞれ F, F' を通るときである。

したがって，求める最大値は 6