［ 東京工業大学 1990 年前期 $\boxed{2}$ ］

$x_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を正数とし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ を満たすとする。

このとき不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log \frac{k}{n}$ を証明せよ。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - k\log\frac{k}{n} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{k}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\log x_i - \log\frac{k}{n}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{nx_i}{k} \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで，$\log x \geqq 1-\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$ であることを示す。

$f(x)=\log x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$ より $f(x)$ は $0<x<1$ で減少，$x>1$ で増加する。

よって，$f(x)$ の最小値は $f(1)=\log 1-\left(1-\dfrac{1}{1}\right)=0$

したがって $\log x \geqq 1-\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$ $\cdots②$ が成り立つ。

①に②を適用すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{nx_i}{k} &\geqq \sum_{i=1}^{n} x_i\left(1-\frac{k}{nx_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{k}{n}\right)\\ &= k-n\cdot\frac{k}{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

よって，不等式は示された。