



x, y, z, w を正数とする。任意の整数 m, n に対して

$$\left(x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{m}}\right)^n + \left(z^{\frac{1}{m}} + w^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left\{ \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(y^{\frac{n}{m}} + w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ。



$$\left(x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{m}}\right)^n + \left(z^{\frac{1}{m}} + w^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left\{ \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(y^{\frac{n}{m}} + w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \dots (*)$$

(*) が任意の整数 m, n に対して成り立つので $m=1, n=2$ に対しても成り立つから

$$(x+y)^2 + (z+w)^2 = \left\{ (x^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + (y^2+w^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2zw + w^2 = x^2 + z^2 + 2(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (y^2+w^2)^{\frac{1}{2}} + y^2 + w^2$$

$$xy + zw = (x^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (y^2+w^2)^{\frac{1}{2}}$$

2 乗して

$$(xy + zw)^2 = (x^2 + z^2)(y^2 + w^2)$$

$$x^2y^2 + 2xyzw + z^2w^2 = x^2y^2 + x^2w^2 + z^2y^2 + z^2w^2$$

$$(xw - yz)^2 = 0$$

よって $xw = yz$ であることが必要条件である。

次に、これが十分条件でもあることを示す。

x, y, z, w は正数なので、 $y = kx, w = kz$ ($k > 0$) とおくことができる。

このとき、

$$((*) \text{ の左辺 }) = \left(x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{m}}\right)^n + \left(z^{\frac{1}{m}} + w^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x^{\frac{1}{m}} + k^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}} \right)^n + \left(z^{\frac{1}{m}} + k^{\frac{1}{m}} z^{\frac{1}{m}} \right)^n \\
&= \left(1 + k^{\frac{1}{m}} \right)^n \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}} \right) \\
((*) \text{の右辺}) &= \left\{ \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(k^{\frac{n}{m}} x^{\frac{n}{m}} + k^{\frac{n}{m}} z^{\frac{n}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \\
&= \left\{ \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} + k^{\frac{1}{m}} \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \\
&= \left\{ \left(1 + k^{\frac{1}{m}} \right) \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \\
&= \left(1 + k^{\frac{1}{m}} \right)^n \left(x^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{n}{m}} \right)
\end{aligned}$$

となり, (*) は任意の正の整数 m, n に対して成り立つ。

よって, 求める必要十分条件は $xw = zy$