[東京工業大学 1989 年 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の点 P から放物線 $y=x^2$ へ 2 本の異なる接線を引き，それらの接点を Q, R とする。

(1) 点 P が次の 3 つの不等式 $y \leqq x-1,\ y \leqq -x+1,\ -1 \leqq y$ を同時に満たす範囲を動くとき，線分 QR の中点が動く範囲を図示せよ。

(2) 三角形 PQR の面積が 2 に等しくなる点 P はどんな曲線上にあるか。その方程式を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $\mathrm{P(X,\ Y)}$ とおく。

$y=x^2$ のとき $y'=2x$ であり，$y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

これが P を通るとき，$\mathrm{Y}-t^2=2t(\mathrm{X}-t)$ より $t^2-2\mathrm{X}t+\mathrm{Y}=0$ …①

①の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とおく。$\alpha,\ \beta$ は Q, R の x 座標に他ならない。

解と係数の関係より $\begin{cases}\alpha+\beta=2\mathrm{X}\\ \alpha\beta=\mathrm{Y}\end{cases}$

QR の中点を $\mathrm{M}(s,\ t)$ とすれば，

$$s=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\mathrm{X}}{2}=\mathrm{X}$$

$$t=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4\mathrm{X}^2-2\mathrm{Y}}{2}=2\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}$$

よって $\begin{cases}\mathrm{X}=s\\ \mathrm{Y}=-t+2\mathrm{X}^2=-t+2s^2\end{cases}$ …② である。

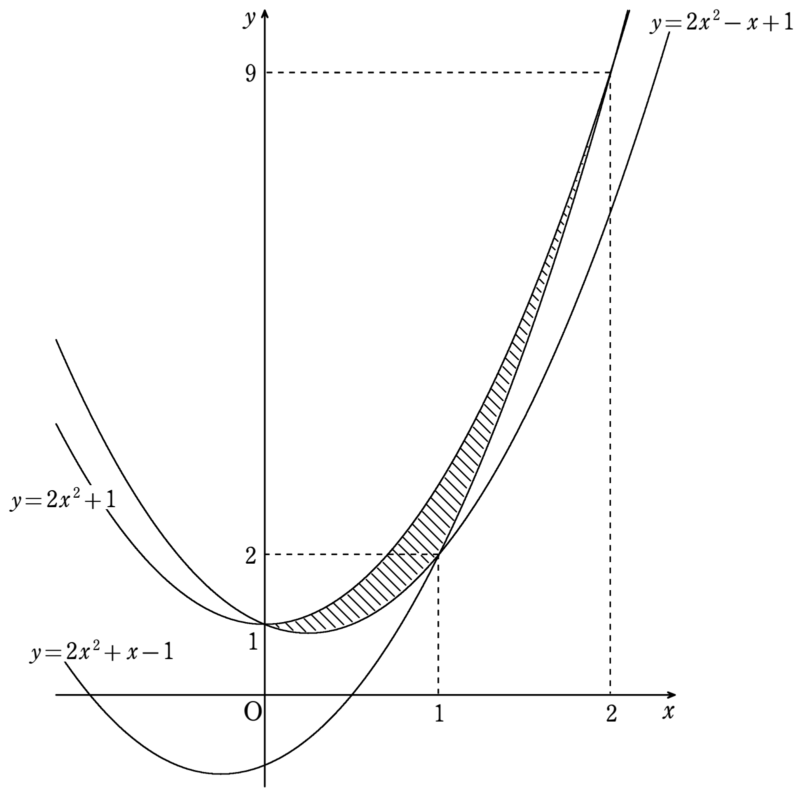
$\mathrm{P(X,\ Y)}$ は不等式 $y \leqq x-1,\ y \leqq -x+1,\ -1 \leqq y$ を満たすので

$\mathrm{Y} \leqq \mathrm{X}-1,\ \mathrm{Y} \leqq -\mathrm{X}+1,\ -1 \leqq \mathrm{Y}$

②より $\begin{cases}-t+2s^2 \leqq s-1\\ -t+2s^2 \leqq -s+1\\ -1 \leqq -t+2s^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t \geqq 2s^2-s+1\\ t \geqq 2s^2+s-1\\ t \leqq 2s^2+1\end{cases}$ を得る。

よって QR の中点 $\mathrm{M}(s,\ t)$ が動く範囲は $\begin{cases}y \geqq 2x^2-x+1\\ y \geqq 2x^2+x-1\\ y \leqq 2x^2+1\end{cases}$ であり，図の斜線部となる。

ただし，境界線上の点はすべて含む。



(2) (1)の $\alpha,\ \beta$ について $\alpha > \beta$ としても一般性を失わない。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\alpha - \mathrm{X},\ \alpha^2 - \mathrm{Y})$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (\beta - \mathrm{X},\ \beta^2 - \mathrm{Y})$ より

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}\left|(\alpha - \mathrm{X})(\beta^2 - \mathrm{Y}) - (\alpha^2 - \mathrm{Y})(\beta - \mathrm{X})\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\alpha\beta^2 - \alpha\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta^2 + \mathrm{XY} - \alpha^2\beta + \alpha^2\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} - \mathrm{XY}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\alpha\beta^2 - \alpha\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta^2 - \alpha^2\beta + \alpha^2\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\mathrm{X}(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - \alpha\beta(\alpha - \beta) - \mathrm{Y}(\alpha - \beta)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|2\mathrm{X}^2(\alpha - \beta) - \mathrm{Y}(\alpha - \beta) - \mathrm{Y}(\alpha - \beta)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(\alpha - \beta)(2\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{Y})\right| \\
&= \left|(\alpha - \beta)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y})\right|
\end{aligned}$$

となる。

ここで，$\alpha - \beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{Y}$ であること，

そして，P から接線が 2 本引けるとき，P が曲線 $y = x^2$ の下側にあるので

$\mathrm{Y} < \mathrm{X}^2$ すなわち $\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y} > 0$ が成り立つことから

$$\left|(\alpha-\beta)(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})\right| = \sqrt{4\mathrm{X}^2-4\mathrm{Y}}\,(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})$$

$$= 2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})^{\frac{3}{2}}$$

$$2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})^{\frac{3}{2}} = 2$$

$$(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})^3 = 1 \quad \cdots③$$

となる。

X, Y は実数であり， $\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}$ も実数なので③は $\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}=1 \Leftrightarrow \mathrm{Y}=\mathrm{X}^2-1$ と同値である。

したがって求める曲線の方程式は $y=x^2-1$

[東京工業大学 1989 年 $\boxed{2}$]

xy 平面で原点を中心とする半径 2 の円を A , 点 $(3, 0)$ を中心とする半径 1 の円を B とする。B が A の周上を，反時計まわりに，すべらずにころがって元の位置に戻るとき，初めに $(2, 0)$ にあった B 上の点 P の描く曲線を C とする。

(1) C 上の点で x 座標が最大となる点の座標を求めよ。

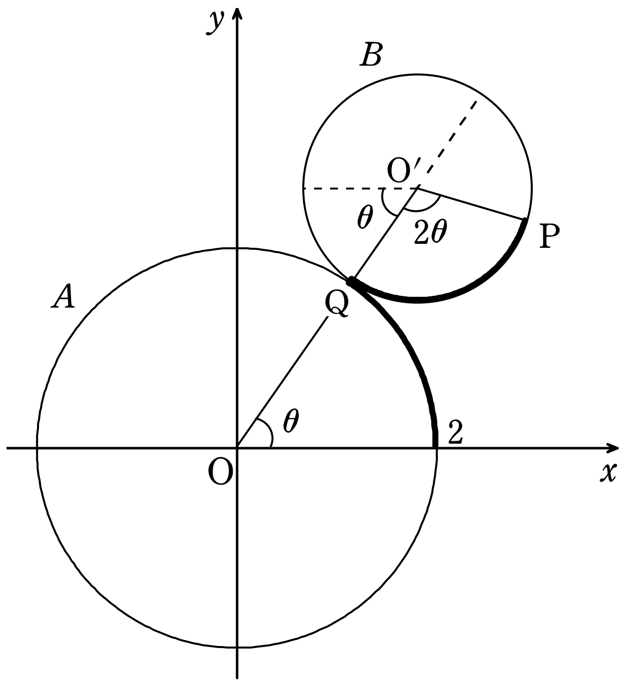
(2) 曲線 C の長さを求めよ。

動円 B の中心を O′ とし，動径 OO′ の x 軸からの回転角を図のように θ とおく。

2 円の接点を Q とおく。

B がすべらずにころがることから $\angle \mathrm{POQ'} = 2\theta$ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ はベクトル $(-1, 0)$ を 3θ だけ原点のまわりに回転させてできるベクトルなので



$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 3\theta \\ -\sin 3\theta \end{pmatrix}$$

であり，さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 3\theta \\ -\sin 3\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta - \cos 3\theta \\ 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{pmatrix}$$

となる。したがって，$\mathrm{P}(x, y)$ とおくと

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta - \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

を得る。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta+3\sin 3\theta$

$$=-3\sin\theta+3\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)$$

$$=-12\sin\theta\left(\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

より x の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	＋	0	−	0	＋	0	−	0	＋	0	−	0
x	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

よって，x が最大となるのは $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$ のときで,

そのときの点 P の座標は $\left(2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right),\ \left(2\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$

(2) 曲線 C の長さを L とする。

$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ であり，$\begin{cases}x=-3\cos\theta-\cos 3\theta\\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta\end{cases}$ なので

$\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta+3\sin 3\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta-3\cos 3\theta$ であるから

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3\sin\theta+3\sin 3\theta\right)^2+\left(3\cos\theta-3\cos 3\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{18-18\left(\sin\theta\sin 3\theta+\cos\theta\cos 3\theta\right)}\,d\theta$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos(\theta-3\theta)}\,d\theta$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2\theta}\,d\theta$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=6\int_0^{2\pi}\left|\sin\theta\right|d\theta$$

$$=6\times 4$$

$=24$ 　　となる。

[東京工業大学 1989 年 $\boxed{3}$]

関数 $f(x)$ は次の等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$$

を満たしているとする。関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき，次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ はすべての x の値で微分可能であることを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を求めよ。

---

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ において $y=0$ とおくと

$f(x)=f(x)+f(0)+f(x)f(0)$

$f(0)\{f(x)+1\}=0$

よって $f(0)=0$ または $f(x)=-1$

(i) $f(0)=0$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(x)f(h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\{1+f(x)\}\\&=f'(0)\{1+f(x)\}\end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ はすべての x で微分可能である。

(ii) $f(x)=-1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{-1-(-1)}{h}\\&=0\end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ はすべての x で微分可能である。

(2) $f(0)=0$ のとき $f'(0)=a$ とおくと

$f'(x)=a\{1+f(x)\}$ より

$f(x)\neq -1$ のとき $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}=a$

よって $\log|1+f(x)|=ax+C$ （C は積分定数）

したがって $1+f(x)=Ae^{ax}$ （$A=\pm e^{C}$）

$f(0)=0$ より $A=1$

よって $f(x)=e^{ax}-1$ である。

$f(x)=-1$のときも与えられた等式を満たす。

よって求める関数 $f(x)$ は $\begin{cases} f(x)=e^{f'(0)x}-1 \\ f(x)=-1 \end{cases}$

[東京工業大学 1989 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|dx$$

☆ ☆

$J_k=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} x^2|\sin nx|dx \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおき， $I_n=\sum_{k=1}^{n}J_k$ とする。

求めるものは $\lim_{n\to\infty}I_n$ である。

$\frac{k-1}{n}\pi\leqq x\leqq\frac{k}{n}\pi$ において $\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2\leqq x^2\leqq\left(\frac{k}{n}\pi\right)^2$ より

$\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2|\sin nx|\leqq x^2|\sin nx|\leqq\left(\frac{k}{n}\pi\right)^2|\sin nx|$ が成り立つ。

したがって $\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx \leqq J_k \leqq \left(\frac{k}{n}\pi\right)^2\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx$ であり，

$|\sin nx|$ の周期は $\frac{\pi}{n}$ であるから

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx|dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{2}{n}$$

よって， $\frac{2}{n}\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2\leqq J_k\leqq\frac{2}{n}\left(\frac{k}{n}\pi\right)^2$ が成り立つ。

したがって $\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2\leqq\sum_{k=1}^{n}J_k=I_n\leqq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\pi\right)^2$ …① であり，

$n\to\infty$ のとき，①の左辺と右辺は $2\pi^2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$ となるので

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{2}{3}\pi^2$ となる。

[別解]

n が自然数のとき，絶対値を外すと

$$S_n=\int_0^{\pi}x^2\,|\sin nx|\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}x^2\sin nx\,dx$$

となる。

ここで，

$$\int_a^b x^2\sin nx\,dx=\int_a^b x^2\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'\,dx$$

$$=\left[x^2\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_a^b+\frac{1}{n}\int_a^b 2x\cos nx\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx\right]_a^b+\frac{2}{n}\int_a^b x\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx\right]_a^b+\frac{2}{n}\left\{\left[x\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\right]_a^b-\frac{1}{n}\int_a^b\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_a^b$$

となるので

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}x^2\sin nx\,dx=\left(-\frac{(k\pi)^2}{n^3}\cos k\pi+\frac{2k\pi}{n^3}\sin k\pi+\frac{2}{n^3}\cos k\pi\right)$$

$$-\left(-\frac{\{(k-1)\pi\}^2}{n^3}\cos(k-1)\pi+\frac{2(k-1)\pi}{n^3}\sin(k-1)\pi+\frac{2}{n^3}\cos(k-1)\pi\right)$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left\{\left(-\frac{(k\pi)^2}{n^3}\cos k\pi+\frac{2k\pi}{n^3}\sin k\pi+\frac{2}{n^3}\cos k\pi\right)\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{\{(k-1)\pi\}^2}{n^3}\cos(k-1)\pi+\frac{2(k-1)\pi}{n^3}\sin(k-1)\pi+\frac{2}{n^3}\cos(k-1)\pi\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)-\left(\frac{2}{n^3}\right)\right\}-\left\{\left(-\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)-\left(\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{(3\pi)^2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)-\left(-\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)\right\}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left\{\left(-\frac{(n\pi)^2}{n^3}\cos k\pi+\frac{2}{n^3}\cos n\pi\right)-\left(-\frac{\{(n-1)\pi\}^2}{n^3}\cos(k-1)\pi+\frac{2}{n^3}\cos(n-1)\pi\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right)+\left(\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right)+\left(\frac{(3\pi)^2}{n^3}+\frac{(2\pi)^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right)+\cdots+\left\{\frac{(n\pi)^2}{n^3}+\frac{\{(n-1)\pi\}^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{n^3}+\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{(3\pi)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n\pi)^2}{n^3}\right)+\left(\frac{\pi^2}{n^3}+\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\cdots+\frac{\{(n-1)\pi\}^2}{n^3}\right)+\left(-\frac{4n}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+\frac{\pi^2}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right)-\frac{4}{n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{\pi^2}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{4}{n^2}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\pi^2\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right\}+\left\{\pi^2\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}\right\}-\frac{4}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\pi^2+\frac{1}{3}\pi^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2$$

[東京工業大学 1989 年 $\boxed{5}$]

箱の中に，1 から n までの数字をそれぞれ 1 つずつ書いた n 枚のカードが入っている。箱から無作為に 1 枚のカードを取り出して，その数字を記録し，箱に戻す。この試行を k 回くり返し，それまでに記録された相異なる数字の個数を S_k とする。$S_k=r$ となる確率を $P(S_k=r)$ で表すとき，次の問に答えよ。

(1) $P(S_k=r)$ を $P(S_{k-1}=r)$ と $P(S_{k-1}=r-1)$ で表せ。

(2) S_k の期待値 $E_k=\sum_{r=1}^{k} r\,P(S_k=r)$ を求めよ。

---

(1) $S_k=r$ となるのは,「$k-1$回目までに r 個の相異なる数字が出ていて，k 回目にすでに出ている r 個の数字の中の 1 つが出るとき」または「$k-1$回目までに $r-1$個の相異なる数字が出ていて，k 回目にまだ出ていない $n-(r-1)$ 個の数字の中の 1 つが出るとき」である。

よって $P(S_k=r)=\dfrac{r}{n}P(S_{k-1}=r)+\dfrac{n-(r-1)}{n}P(S_{k-1}=r-1)$

(2) $E_k=\sum_{r=1}^{k} r\,P(S_k=r)$

$$=\sum_{r=1}^{k} r\left\{\frac{r}{n}P(S_{k-1}=r)+\frac{n-(r-1)}{n}P(S_{k-1}=r-1)\right\}$$

$$=\sum_{r=1}^{k}\frac{r^2}{n}P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{nr-r(r-1)}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}r^2\,P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{nr-r^2+r}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}r^2\,P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{nr-(r-1)^2-r+1}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}r^2\,P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{n(r-1)+n-(r-1)-(r-1)^2}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}r^2\,P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{(n-1)(r-1)+n-(r-1)^2}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}r^2\,P(S_{k-1}=r)+\frac{n-1}{n}\sum_{r=1}^{k}(r-1)P(S_{k-1}=r-1)$$

$$+\sum_{r=1}^{k}P(S_{k-1}=r-1)-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(r-1)^2P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}r^2\,P(S_{k-1}=r)+\frac{n-1}{n}\sum_{r=1}^{k}(r-1)P(S_{k-1}=r-1)+1-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(r-1)^2P(S_{k-1}=r-1)$$

ここで

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k} r^2 P(S_{k-1}=r)=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(r-1)^2 P(S_{k-1}=r-1),\quad \sum_{r=1}^{k}(r-1)P(S_{k-1}=r-1)=E_{k-1}$$

であることから

$$E_k=\frac{n-1}{n}E_{k-1}+1,\quad E_1=P(S_1=1)=1$$

である。

この漸化式を解くと

$$E_k=\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}+\left(1-\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

$$=n+(1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

$$=n-n\cdot\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

$$=n\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right\}$$