[東京工業大学 1989 年 $\boxed{4}$]

☆―――☆

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2\,|\sin nx|\,dx$$

☆―――☆

$J_k=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} x^2\,|\sin nx|\,dx \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおき， $I_n=\sum_{k=1}^{n} J_k$ とする。

求めるものは $\lim_{n\to\infty} I_n$ である。

$\frac{k-1}{n}\pi \leqq x \leqq \frac{k}{n}\pi$ において $\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2 \leqq x^2 \leqq \left(\frac{k}{n}\pi\right)^2$ より

$\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2 |\sin nx| \leqq x^2\,|\sin nx| \leqq \left(\frac{k}{n}\pi\right)^2 |\sin nx|$ が成り立つ。

したがって $\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2 \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\,dx \leqq J_k \leqq \left(\frac{k}{n}\pi\right)^2 \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\,dx$ であり，

$|\sin nx|$ の周期は $\frac{\pi}{n}$ であるから

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{n}$$

よって，$\frac{2}{n}\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2 \leqq J_k \leqq \frac{2}{n}\left(\frac{k}{n}\pi\right)^2$ が成り立つ。

したがって $\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} J_k = I_n \leqq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\pi\right)^2$ …① であり，

$n\to\infty$ のとき，①の左辺と右辺は $2\pi^2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$ となるので

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2}{3}\pi^2$ となる。

[別解]

n が自然数のとき，絶対値を外すと

$$S_n=\int_0^{\pi}x^2\,|\sin nx|\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}x^2\sin nx\,dx$$

となる。

ここで，

$$\int_a^b x^2\sin nx\,dx=\int_a^b x^2\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'\,dx$$

$$=\left[x^2\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_a^b+\frac{1}{n}\int_a^b 2x\cos nx\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx\right]_a^b+\frac{2}{n}\int_a^b x\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx\right]_a^b+\frac{2}{n}\left\{\left[x\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\right]_a^b-\frac{1}{n}\int_a^b\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_a^b$$

となるので

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}x^2\sin nx\,dx=\left(-\frac{(k\pi)^2}{n^3}\cos k\pi+\frac{2k\pi}{n^3}\sin k\pi+\frac{2}{n^3}\cos k\pi\right)$$

$$-\left(-\frac{\{(k-1)\pi\}^2}{n^3}\cos(k-1)\pi+\frac{2(k-1)\pi}{n^3}\sin(k-1)\pi+\frac{2}{n^3}\cos(k-1)\pi\right)$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left\{\left(-\frac{(k\pi)^2}{n^3}\cos k\pi+\frac{2k\pi}{n^3}\sin k\pi+\frac{2}{n^3}\cos k\pi\right)\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{\{(k-1)\pi\}^2}{n^3}\cos(k-1)\pi+\frac{2(k-1)\pi}{n^3}\sin(k-1)\pi+\frac{2}{n^3}\cos(k-1)\pi\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)-\left(\frac{2}{n^3}\right)\right\}-\left\{\left(-\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)-\left(\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{(3\pi)^2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)-\left(-\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)\right\}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left\{\left(-\frac{(n\pi)^2}{n^3}\cos k\pi+\frac{2}{n^3}\cos n\pi\right)-\left(-\frac{\{(n-1)\pi\}^2}{n^3}\cos(k-1)\pi+\frac{2}{n^3}\cos(n-1)\pi\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right)+\left(\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{\pi^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right)+\left(\frac{(3\pi)^2}{n^3}+\frac{(2\pi)^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right)+\cdots+\left\{\frac{(n\pi)^2}{n^3}+\frac{\{(n-1)\pi\}^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{n^3}+\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\frac{(3\pi)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n\pi)^2}{n^3}\right)+\left(\frac{\pi^2}{n^3}+\frac{(2\pi)^2}{n^3}+\cdots+\frac{\{(n-1)\pi\}^2}{n^3}\right)+\left(-\frac{4n}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+\frac{\pi^2}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right)-\frac{4}{n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{\pi^2}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{4}{n^2}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\pi^2\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right\}+\left\{\pi^2\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}\right\}-\frac{4}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\pi^2+\frac{1}{3}\pi^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2$$