［ 東京工業大学 1989 年 $\boxed{3}$ ］

関数 $f(x)$ は次の等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$$

を満たしているとする。関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき，次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ はすべての x の値で微分可能であることを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を求めよ。

---

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ において $y=0$ とおくと

$f(x)=f(x)+f(0)+f(x)f(0)$

$f(0)\{f(x)+1\}=0$

よって $f(0)=0$ または $f(x)=-1$

(ⅰ) $f(0)=0$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(x)f(h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\{1+f(x)\}\\&=f'(0)\{1+f(x)\}\end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ はすべての x で微分可能である。

(ⅱ) $f(x)=-1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{-1-(-1)}{h}\\&=0\end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ はすべての x で微分可能である。

(2) $f(0)=0$ のとき $f'(0)=a$ とおくと

$f'(x)=a\{1+f(x)\}$ より

$f(x)\neq -1$ のとき $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}=a$

よって　$\log|1+f(x)|=ax+C$（Cは積分定数）

したがって　$1+f(x)=Ae^{ax}$（$A=\pm e^{C}$）

$f(0)=0$　より　$A=1$

よって　$f(x)=e^{ax}-1$　である。

$f(x)=-1$のときも与えられた等式を満たす。

よって求める関数 $f(x)$ は　$\begin{cases} f(x)=e^{f'(0)x}-1 \\ f(x)=-1 \end{cases}$