［ 東京工業大学 1989 年 $\boxed{2}$ ］

xy 平面で原点を中心とする半径 2 の円を A，点 $(3, 0)$ を中心とする半径 1 の円を B とする。B が A の周上を，反時計まわりに，すべらずにころがって元の位置に戻るとき，初めに $(2, 0)$ にあった B 上の点 P の描く曲線を C とする。

(1) C 上の点で x 座標が最大となる点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

動円 B の中心を O′ とし，動径 OO′ の x 軸からの回転角を図のように θ とおく。

2 円の接点を Q とおく。

B がすべらずにころがることから $\angle \mathrm{POQ'} = 2\theta$ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ はベクトル $(-1, 0)$ を 3θ だけ原点のまわりに回転させてできるベクトルなので

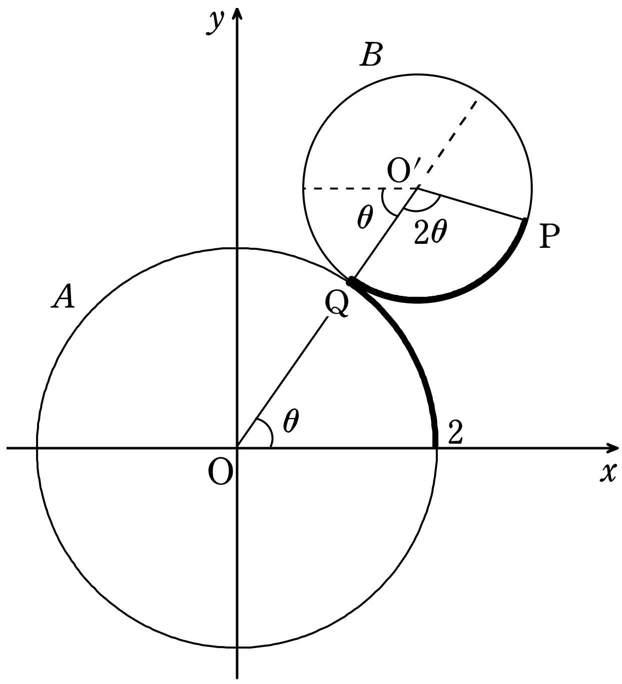
$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 3\theta \\ -\sin 3\theta \end{pmatrix}$$

であり，さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 3\theta \\ -\sin 3\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta - \cos 3\theta \\ 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{pmatrix}$$



となる。したがって，P(x, y) とおくと

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta - \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

を得る。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta+3\sin 3\theta$

$$=-3\sin\theta+3\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)$$

$$=-12\sin\theta\left(\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

より x の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	＋	0	－	0	＋	0	－	0	＋	0	－	0
x	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

よって， x が最大となるのは $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$ のときで,

そのときの点 P の座標は $\left(2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right),\ \left(2\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$

(2) 曲線 C の長さを L とする。

$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ であり, $\begin{cases}x=-3\cos\theta-\cos 3\theta\\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta\end{cases}$ なので

$\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta+3\sin 3\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta-3\cos 3\theta$ であるから

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3\sin\theta+3\sin 3\theta\right)^2+\left(3\cos\theta-3\cos 3\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{18-18\left(\sin\theta\sin 3\theta+\cos\theta\cos 3\theta\right)}\,d\theta$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos(\theta-3\theta)}\,d\theta$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2\theta}\,d\theta$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=6\int_0^{2\pi}\left|\sin\theta\right|d\theta$$

$$=6\times 4$$

$=24$ 　　となる。