[東京工業大学 1989 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の点 P から放物線 $y=x^2$ へ 2 本の異なる接線を引き，それらの接点を $\mathrm{Q},\ \mathrm{R}$ とする。

(1) 点 P が次の 3 つの不等式 $y \leqq x-1,\ y \leqq -x+1,\ -1 \leqq y$ を同時に満たす範囲を動くとき，線分 QR の中点が動く範囲を図示せよ。

(2) 三角形 PQR の面積が 2 に等しくなる点 P はどんな曲線上にあるか。その方程式を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $\mathrm{P(X,\ Y)}$ とおく。

$y=x^2$ のとき $y'=2x$ であり，$y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

これが P を通るとき，$\mathrm{Y}-t^2=2t(\mathrm{X}-t)$ より $t^2-2\mathrm{X}t+\mathrm{Y}=0$ …①

①の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とおく。$\alpha,\ \beta$ は $\mathrm{Q},\ \mathrm{R}$ の x 座標に他ならない。

解と係数の関係より $\begin{cases}\alpha+\beta=2\mathrm{X}\\ \alpha\beta=\mathrm{Y}\end{cases}$

QR の中点を $\mathrm{M}(s,\ t)$ とすれば，

$$s=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\mathrm{X}}{2}=\mathrm{X}$$

$$t=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4\mathrm{X}^2-2\mathrm{Y}}{2}=2\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}$$

よって $\begin{cases}\mathrm{X}=s\\ \mathrm{Y}=-t+2\mathrm{X}^2=-t+2s^2\end{cases}$ …② である。

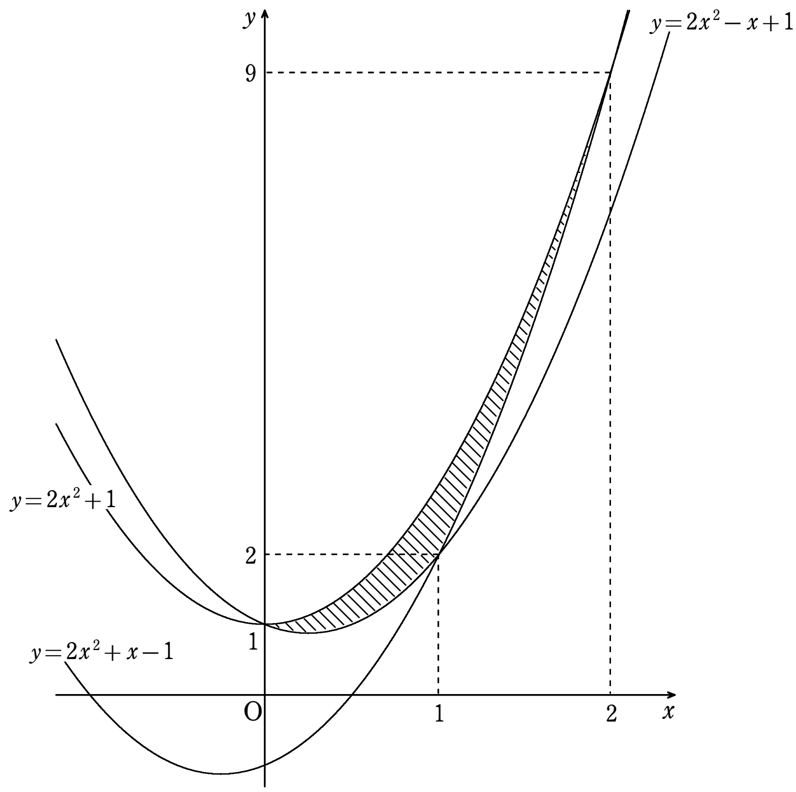
$\mathrm{P(X,\ Y)}$ は不等式 $y \leqq x-1,\ y \leqq -x+1,\ -1 \leqq y$ を満たすので

$\mathrm{Y} \leqq \mathrm{X}-1,\ \mathrm{Y} \leqq -\mathrm{X}+1,\ -1 \leqq \mathrm{Y}$

②より $\begin{cases}-t+2s^2 \leqq s-1\\ -t+2s^2 \leqq -s+1\\ -1 \leqq -t+2s^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t \geqq 2s^2-s+1\\ t \geqq 2s^2+s-1\\ t \leqq 2s^2+1\end{cases}$ を得る。

よって QR の中点 $\mathrm{M}(s,\ t)$ が動く範囲は $\begin{cases}y \geqq 2x^2-x+1\\ y \geqq 2x^2+x-1\\ y \leqq 2x^2+1\end{cases}$ であり，図の斜線部となる。

ただし，境界線上の点はすべて含む。



(2) (1)の $\alpha,\ \beta$ について $\alpha>\beta$ としても一般性を失わない。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\alpha-\mathrm{X},\ \alpha^2-\mathrm{Y})$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(\beta-\mathrm{X},\ \beta^2-\mathrm{Y})$ より

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{1}{2}\left|(\alpha-\mathrm{X})(\beta^2-\mathrm{Y})-(\alpha^2-\mathrm{Y})(\beta-\mathrm{X})\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\alpha\beta^2-\alpha\mathrm{Y}-\mathrm{X}\beta^2+\mathrm{XY}-\alpha^2\beta+\alpha^2\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}-\mathrm{XY}\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\alpha\beta^2-\alpha\mathrm{Y}-\mathrm{X}\beta^2-\alpha^2\beta+\alpha^2\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{X}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-\alpha\beta(\alpha-\beta)-\mathrm{Y}(\alpha-\beta)\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|2\mathrm{X}^2(\alpha-\beta)-\mathrm{Y}(\alpha-\beta)-\mathrm{Y}(\alpha-\beta)\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|(\alpha-\beta)(2\mathrm{X}^2-2\mathrm{Y})\right|\\
&=\left|(\alpha-\beta)(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})\right|
\end{aligned}$$

となる。

ここで，$\alpha-\beta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4\mathrm{X}^2-4\mathrm{Y}$ であること，

そして，P から接線が 2 本引けるとき，P が曲線 $y=x^2$ の下側にあるので

$\mathrm{Y}<\mathrm{X}^2$ すなわち $\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}>0$ が成り立つことから

$$\left|(\alpha-\beta)(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})\right| = \sqrt{4\mathrm{X}^2-4\mathrm{Y}}(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})$$

$$= 2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})^{\frac{3}{2}}$$

$$2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})^{\frac{3}{2}} = 2$$

$$(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y})^3 = 1 \quad \cdots ③$$

となる。

X, Y は実数であり， $\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}$ も実数なので③は $\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}=1 \Leftrightarrow \mathrm{Y}=\mathrm{X}^2-1$ と同値である。

したがって求める曲線の方程式は $y = x^2 - 1$