［ 東京工業大学 1988 年 $\boxed{1}$ ］

数列$\{a_n\}$を$a_1=1,\ a_n=1+\dfrac{1}{n^2}{a_{n-1}}^2\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ で定める。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

$a_1=1,\ a_n=1+\dfrac{1}{n^2}{a_{n-1}}^2$ より 帰納的に $a_n\geqq 0$ が成り立つ。

さらに $a_n\leqq 2$ であることを数学的帰納法により示す。

(ｉ) $n=1$のとき

$a_1=1$ であるから成り立つ。

(ⅱ) $n=k$のとき

題意が成り立つ，すなわち $a_k\leqq 2$ であるとする。

このとき $a_{k+1}=1+\dfrac{{a_k}^2}{(k+1)^2}\leqq 1+\dfrac{2^2}{(1+1)^2}=2$ となるから $a_{k+1}\leqq 2$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(ｉ)(ⅱ)より $a_n\leqq 2$（$n=1,\ 2,\ \cdots$） となる。

したがって $1+\dfrac{0}{n^2}\leqq a_n\leqq 1+\dfrac{4}{n^2}$ が成り立ち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)=1$ であるから

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

［ 東京工業大学 1988 年 $\boxed{2}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は，$|x|\leqq 1$ で $|f(x)|\leqq 1$ を満たしている。このとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，

(1) $|f'(1)|\leqq 4$ を示せ。

(2) $|f'(1)|=4$ となる $f(x)$ をすべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ より $f'(x)=2ax+b$

$$\begin{aligned}|f'(1)|&=|2a+b|\\&=|a+a+b|\\&\leqq|a|+|a+b| \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで，$|x|\leqq 1$ で $|f(x)|\leqq 1$ なので，特に

$|f(1)|=|a+b+c|\leqq 1$ …②

$|f(0)|=|c|\leqq 1$ …③

$|f(-1)|=|a-b+c|\leqq 1$ …④

が成り立つ。

$a+b=f(1)-f(0)$ より $|a+b|=|f(1)-f(0)|$

$\leqq|f(1)|+|f(0)|$

②，③より $\leqq 1+1=2$ …⑤

$2a+2c=f(1)+f(-1)$ より $|2a+2c|=|f(1)+f(-1)|$

$\leqq|f(1)|+|f(-1)|$

②，④より $\leqq 1+1=2$ よって $|a+c|\leqq 1$

$|a+c|\leqq 1$ より $|a|-|c|\leqq|a-c|\leqq 1$ から $|a|\leqq 1+|c|$ …⑥

③，⑥より $|a|\leqq 1+|c|\leqq 1+1=2$ …⑦

①，⑤，⑦より $|f'(1)|\leqq 2+2=4$ が示された。

⑵ ⑤より $-2 \leqq a+b \leqq 2$ …⑧

③，④より同様にして $-2 \leqq a-b \leqq 2$ …⑨

$|f'(1)|=4$ より $|2a+b|=4$

（ⅰ）$2a+b=4$…⑩ のとき

⑧，⑩より $-2 \leqq a+(-2a+4) \leqq 2 \Leftrightarrow 2 \leqq a \leqq 6$

⑨，⑩より $-2 \leqq a-(-2a+4) \leqq 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \leqq a \leqq 2$

よって $a=2$ を得る。このとき $b=0$ である。

さらに $|a+c| \leqq 1$ より $-3 \leqq c \leqq -1$ であり，③より $-1 \leqq c \leqq 1$ から $c=-1$

したがってこのとき $f(x)=2x^2-1$

（ⅱ）$2a+b=-4$…⑪ のとき

⑧，⑪より $-2 \leqq a+(-2a-4) \leqq 2 \Leftrightarrow -6 \leqq a \leqq -2$

⑨，⑩より $-2 \leqq a-(-2a-4) \leqq 2 \Leftrightarrow -2 \leqq a \leqq -\dfrac{2}{3}$

よって $a=-2$ を得る。このとき $b=0$ である。

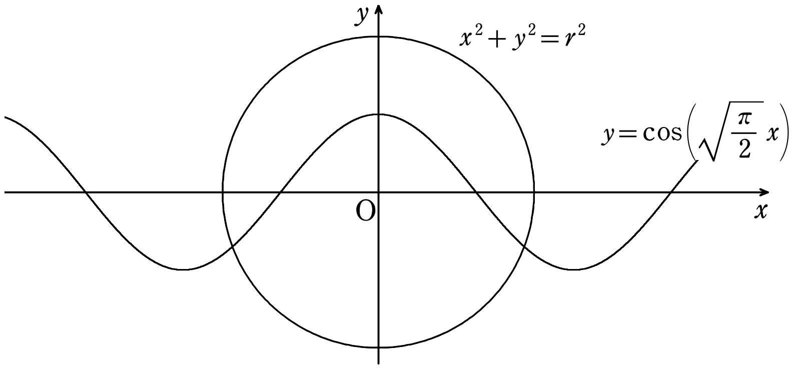
さらに $|a+c| \leqq 1$ より $1 \leqq c \leqq 3$ であり，③より $-1 \leqq c \leqq 1$ から $c=1$

したがってこのとき $f(x)=-2x^2+1$

（ⅰ)，（ⅱ)より求める $f(x)$ は $\begin{cases} f(x)=2x^2-1 \\ f(x)=-2x^2+1 \end{cases}$

[東京工業大学 1988 年 $\boxed{3}$]

xy 平面上の曲線 $y=\cos\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)$ と, 原点を中心とする半径 r の円との共有点の個数 $N(r)$ を求めよ。



2 つの曲線を連立すると $\begin{cases} y=\cos\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right) & \cdots① \\ x^2+y^2=r^2 & \cdots② \end{cases}$

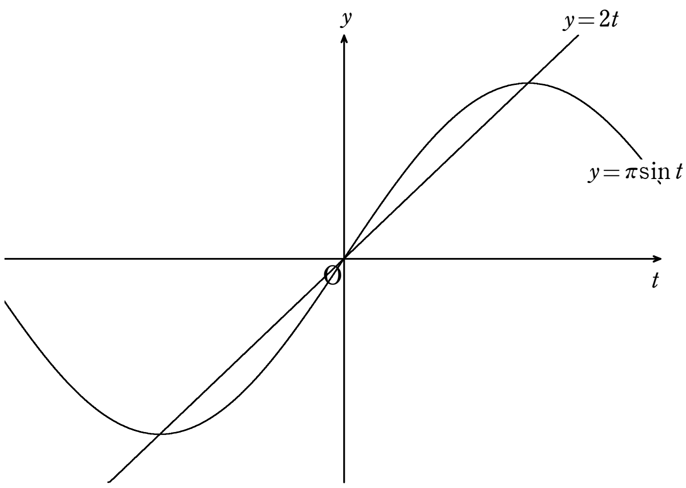
①を②に代入して $x^2+\cos^2\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)=r^2$

ここで, $f(x)=x^2+\cos^2\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)=x^2+\dfrac{1+\cos\left(\sqrt{2\pi}\,x\right)}{2}$ とおくと

$f'(x)=2x-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sin\left(\sqrt{2\pi}\,x\right)$

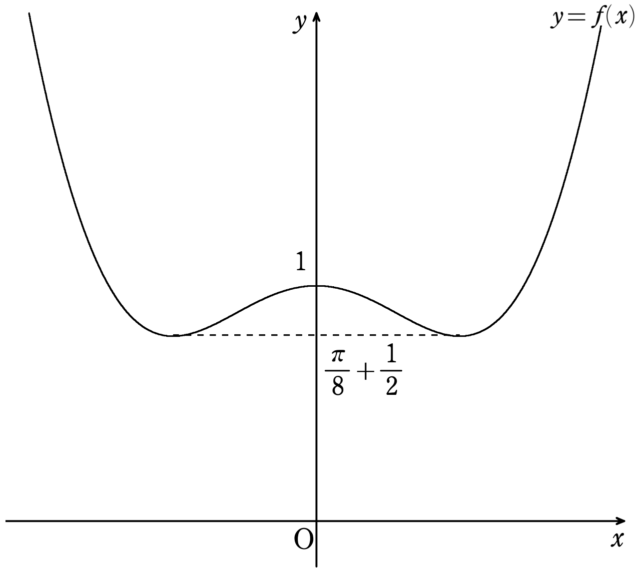
であり, $f'(x)=0$ となるのは $\begin{cases} y=2x \\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sin\left(\sqrt{2\pi}\,x\right) \end{cases}$ の交点の x 座標である。

$2\sqrt{2\pi}x=\pi\sin\left(\sqrt{2\pi}\,x\right)$ より $\sqrt{2\pi}x=t$ とおくと $2t=\pi\sin t$



これを満たすtは　$t=0,\ \pm\dfrac{\pi}{2}$　なので　$x=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\pi}{2}=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$　となる。

$f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}$　であるから$y=f(x)$のグラフは次のようになる。



よって求める共有点の個数$N(r)$は

$0<r<\sqrt{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}}$ のとき　$N(r)=0$

$r=\sqrt{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}}$　のとき　$N(r)=2$

$\sqrt{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}}<r<1$　のとき　$N(r)=4$

$r=1$　のとき　$N(r)=3$

$r>1$　のとき　$N(r)=2$

である。

[東京工業大学 1988 年 $\boxed{4}$]

☆───☆

xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C，点 $(4, 0)$ を中心とする半径 2 の円を D とする。動点 P は点 $(1, 0)$ を出発し円 C 上を時計と反対回りに角速度 2 で動き，動点 Q は同時刻に点 $(6, 0)$ を出発し円 D 上を時計と反対回りに角速度 1 で動くものとする。P と Q の距離の最大値と最小値を求め，最大値と最小値を与える P, Q の座標を，それぞれ求めよ。

☆───☆

P, Q は媒介変数 t を用いて $\mathrm{P}(\cos 2t, \sin 2t)$， $\mathrm{Q}(4+2\cos t, 2\sin t)$ と表せる。

$\mathrm{PQ}^2=(4+2\cos t-\cos 2t)^2+(2\sin t-\sin 2t)^2$

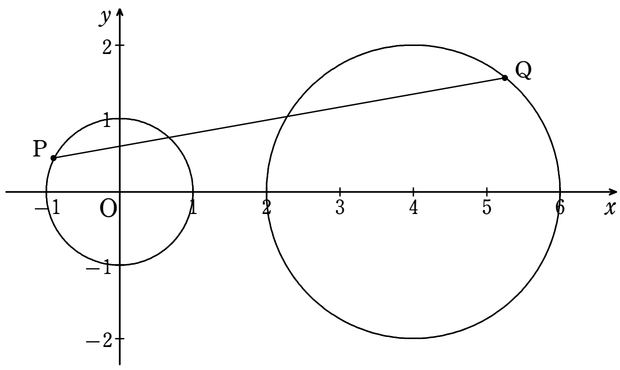
$=16+4\cos^2 t+\cos^2 2t+16\cos t-8\cos 2t-4\cos t\cos 2t+4\sin^2 t-4\sin t\sin 2t+\sin^2 2t$

$=21+16\cos t-8\cos 2t-4\cos t\cos 2t-4\sin t\sin 2t$

$=21+16\cos t-8(2\cos^2 t-1)-4\{\cos(t-2t)\}$

$=-16\cos^2 t+12\cos t+29$

$=-16\left(\cos t-\dfrac{3}{8}\right)^2+\dfrac{125}{4}$



$-1\leqq\cos t\leqq 1$ であるから

$\cos t=\dfrac{3}{8}$ のとき PQ は最大値 $\sqrt{\dfrac{125}{4}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ をとる。

このとき， $\cos 2t=2\cos^2 t-1=-\dfrac{23}{32}$， $\sin 2t=\pm\sqrt{1-\cos^2 2t}=\pm\dfrac{3\sqrt{55}}{32}$ より

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{23}{32},\pm\dfrac{3\sqrt{55}}{32}\right)$ となり，

また， $4+2\cos t=4+2\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{19}{4}$， $2\sin t=\pm 2\sqrt{1-\cos^2 t}=\pm\dfrac{\sqrt{55}}{4}$ より

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{19}{4},\pm\dfrac{\sqrt{55}}{4}\right)$ となる。ただし，複号同順である。

さらに， $\cos t=-1$ のとき PQ は最小値 1 をとる。

このとき， $\mathrm{P}(1, 0), \mathrm{Q}(2, 0)$ である。

[東京工業大学 1988 年 $\boxed{5}$]

☆―――☆

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$ を求めよ。

☆―――☆

${}_{3n}\mathrm{C}_n=\dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$，${}_{2n}\mathrm{C}_n=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$ であるから

$$\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{\dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}}$$

$$=\frac{3n(3n-1)\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2n(2n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)}$$

よって

$$\log\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{3n(3n-1)\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2n(2n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\log\frac{3}{2}+\log\frac{3n-1}{2n-1}+\cdots+\log\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{3n-k}{2n-k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{3-\dfrac{k}{n}}{2-\dfrac{k}{n}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{3-\dfrac{k}{n}}{2-\dfrac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\log\frac{3-x}{2-x}\,dx$$

$$=\int_0^1\log(3-x)\,dx-\int_0^1\log(2-x)\,dx$$

$$=-2(\log 2-1)+3(\log 3-1)-\left\{+1+2(\log 2-1)\right\}$$

$$=\left[-(3-x)\left\{\log\left(3-x\right)-1\right\}\right]_0^1-\left[-(2-x)\left\{\log\left(2-x\right)-1\right\}\right]_0^1$$

$$=-4\log 2+3\log 3$$

$$=\log\frac{27}{16}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{16}$