[東京工業大学 1988 年 $\boxed{4}$]

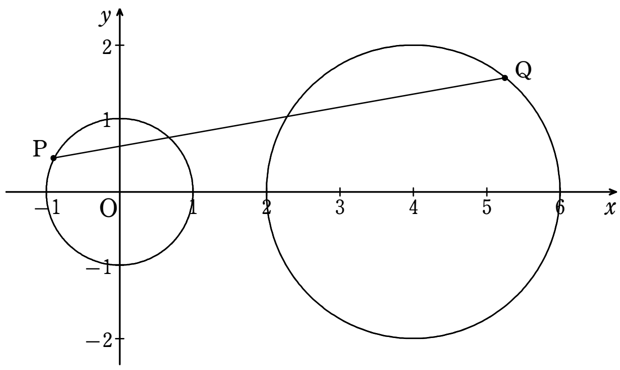
☆ ☆

xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C，点 $(4,0)$ を中心とする半径 2 の円を D とする。動点 P は点 $(1,0)$ を出発し円 C 上を時計と反対回りに角速度 2 で動き，動点 Q は同時刻に点 $(6,0)$ を出発し円 D 上を時計と反対回りに角速度 1 で動くものとする。P と Q の距離の最大値と最小値を求め，最大値と最小値を与える P, Q の座標を，それぞれ求めよ。

☆ ☆

P, Q は媒介変数 t を用いて $\mathrm{P}(\cos 2t, \sin 2t)$， $\mathrm{Q}(4+2\cos t, 2\sin t)$ と表せる。

$$\mathrm{PQ}^2=(4+2\cos t-\cos 2t)^2+(2\sin t-\sin 2t)^2$$
$$=16+4\cos^2 t+\cos^2 2t+16\cos t-8\cos 2t-4\cos t\cos 2t+4\sin^2 t-4\sin t\sin 2t+\sin^2 2t$$
$$=21+16\cos t-8\cos 2t-4\cos t\cos 2t-4\sin t\sin 2t$$
$$=21+16\cos t-8(2\cos^2 t-1)-4\{\cos(t-2t)\}$$
$$=-16\cos^2 t+12\cos t+29$$
$$=-16\left(\cos t-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{125}{4}$$



$-1\leqq\cos t\leqq 1$ であるから

$\cos t=\dfrac{3}{8}$ のとき PQ は最大値 $\sqrt{\dfrac{125}{4}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ をとる。

このとき， $\cos 2t=2\cos^2 t-1=-\dfrac{23}{32}$， $\sin 2t=\pm\sqrt{1-\cos^2 2t}=\pm\dfrac{3\sqrt{55}}{32}$ より

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{23}{32},\pm\dfrac{3\sqrt{55}}{32}\right)$ となり，

また， $4+2\cos t=4+2\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{19}{4}$， $2\sin t=\pm 2\sqrt{1-\cos^2 t}=\pm\dfrac{\sqrt{55}}{4}$ より

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{19}{4},\pm\dfrac{\sqrt{55}}{4}\right)$ となる。ただし，複号同順である。

さらに， $\cos t=-1$ のとき PQ は最小値 1 をとる。

このとき， $\mathrm{P}(1,0)$, $\mathrm{Q}(2,0)$ である。