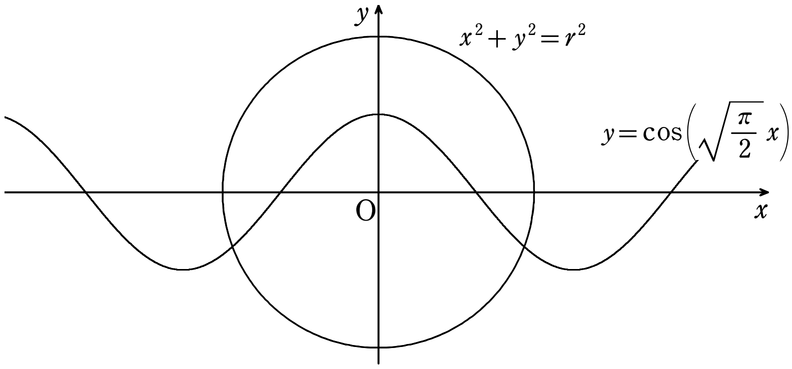
[東京工業大学 1988 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

xy 平面上の曲線 $y=\cos\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)$ と, 原点を中心とする半径 r の円との共有点の個数 $N(r)$ を求めよ。

☆ ☆



2 つの曲線を連立すると $\begin{cases} y=\cos\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right) & \cdots ① \\ x^2+y^2=r^2 & \cdots ② \end{cases}$

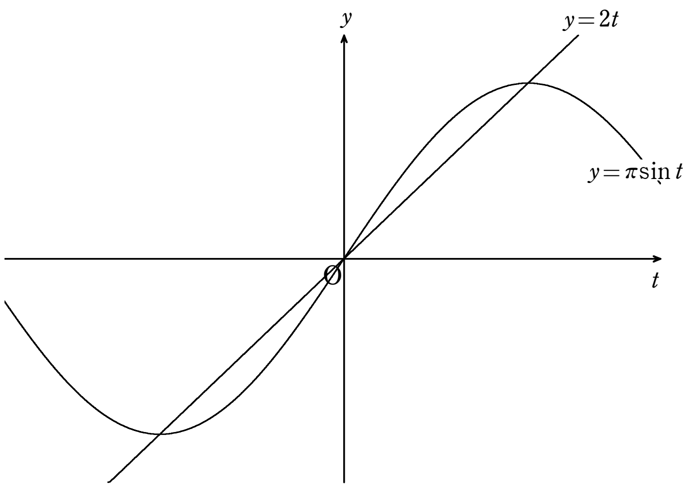
①を②に代入して $x^2+\cos^2\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)=r^2$

ここで, $f(x)=x^2+\cos^2\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)=x^2+\dfrac{1+\cos\left(\sqrt{2\pi}\,x\right)}{2}$ とおくと

$f'(x)=2x-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sin\left(\sqrt{2\pi}\,x\right)$

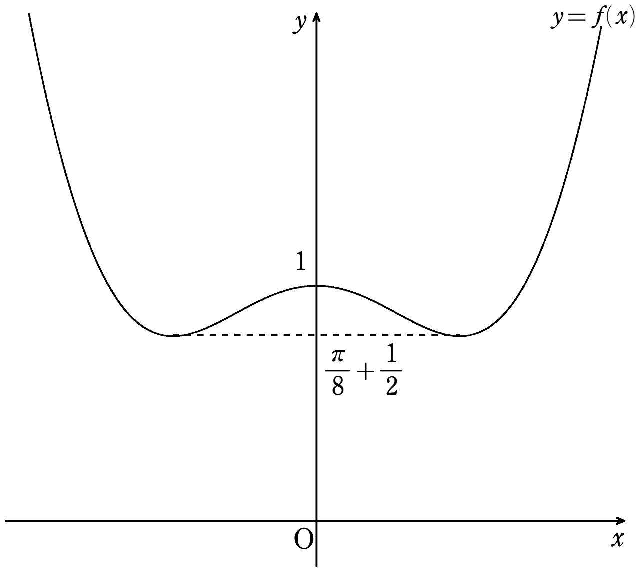
であり, $f'(x)=0$ となるのは $\begin{cases} y=2x \\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sin\left(\sqrt{2\pi}\,x\right) \end{cases}$ の交点の x 座標である。

$2\sqrt{2\pi}x=\pi\sin\left(\sqrt{2\pi}\,x\right)$ より $\sqrt{2\pi}x=t$ とおくと $2t=\pi\sin t$



これを満たすtは　$t=0,\ \pm\dfrac{\pi}{2}$　なので　$x=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\pi}{2}=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$　となる。

$f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}$　であるから$y=f(x)$のグラフは次のようになる。



よって求める共有点の個数$N(r)$は

$0<r<\sqrt{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}}$ のとき　$N(r)=0$

$r=\sqrt{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}}$　のとき　$N(r)=2$

$\sqrt{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}}<r<1$　のとき　$N(r)=4$

$r=1$　のとき　$N(r)=3$

$r>1$　のとき　$N(r)=2$

である。