

[ 東京工業大学 1988 年 2 ]



関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  は、 $|x| \leq 1$  で  $|f(x)| \leq 1$  を満たしている。このとき、 $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  について、

(1)  $|f'(1)| \leq 4$  を示せ。

(2)  $|f'(1)| = 4$  となる  $f(x)$  をすべて求めよ。



(1)  $f(x) = ax^2 + bx + c$  より  $f'(x) = 2ax + b$

$$|f'(1)| = |2a + b|$$

$$= |a + a + b|$$

$$\leq |a| + |a + b| \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $|x| \leq 1$  で  $|f(x)| \leq 1$  なので、特に

$$|f(1)| = |a + b + c| \leq 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$|f(0)| = |c| \leq 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$|f(-1)| = |a - b + c| \leq 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。

$$a + b = f(1) - f(0) \quad \text{より} \quad |a + b| = |f(1) - f(0)|$$

$$\leq |f(1)| + |f(0)|$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より} \quad \leq 1 + 1 = 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$2a + 2c = f(1) + f(-1) \quad \text{より} \quad |2a + 2c| = |f(1) + f(-1)|$$

$$\leq |f(1)| + |f(-1)|$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{より} \quad \leq 1 + 1 = 2 \quad \text{よって} \quad |a + c| \leq 1$$

$$|a + c| \leq 1 \quad \text{より} \quad |a| - |c| \leq |a - c| \leq 1 \quad \text{から} \quad |a| \leq 1 + |c| \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{6} \text{より} \quad |a| \leq 1 + |c| \leq 1 + 1 = 2 \quad \dots \textcircled{7}$$

①, ⑤, ⑦より  $|f'(1)| \leq 2 + 2 = 4$  が示された。

(2) ⑤より  $-2 \leq a+b \leq 2 \dots \textcircled{8}$

③, ④より同様に  $-2 \leq a-b \leq 2 \dots \textcircled{9}$

$|f'(1)|=4$  より  $|2a+b|=4$

(i)  $2a+b=4 \dots \textcircled{10}$  のとき

⑧, ⑩より  $-2 \leq a+(-2a+4) \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq a \leq 6$

⑨, ⑩より  $-2 \leq a-(-2a+4) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a \leq 2$

よって  $a=2$  を得る。このとき  $b=0$  である。

さらに  $|a+c| \leq 1$  より  $-3 \leq c \leq -1$  であり, ③より  $-1 \leq c \leq 1$  から  $c=-1$

したがってこのとき  $f(x)=2x^2-1$

(ii)  $2a+b=-4 \dots \textcircled{11}$  のとき

⑧, ⑪より  $-2 \leq a+(-2a-4) \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq a \leq -2$

⑨, ⑪より  $-2 \leq a-(-2a-4) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$

よって  $a=-2$  を得る。このとき  $b=0$  である。

さらに  $|a+c| \leq 1$  より  $1 \leq c \leq 3$  であり, ③より  $-1 \leq c \leq 1$  から  $c=1$

したがってこのとき  $f(x)=-2x^2+1$

$$(i), (ii) \text{より求める } f(x) \text{ は } \begin{cases} f(x)=2x^2-1 \\ f(x)=-2x^2+1 \end{cases}$$