[東京工業大学 1988 年 $\boxed{1}$]

☆────────────────────☆

数列$\{a_n\}$を$a_1=1,\ a_n=1+\dfrac{1}{n^2}a_{n-1}{}^2\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ で定める。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

☆────────────────────☆

$a_1=1,\ a_n=1+\dfrac{1}{n^2}a_{n-1}{}^2$ より 帰納的に $a_n\geqq 0$ が成り立つ。

さらに $a_n\leqq 2$ であることを数学的帰納法により示す。

(ｉ) $n=1$のとき

$a_1=1$ であるから成り立つ。

(ⅱ) $n=k$のとき

題意が成り立つ，すなわち $a_k\leqq 2$ であるとする。

このとき $a_{k+1}=1+\dfrac{a_k{}^2}{(k+1)^2}\leqq 1+\dfrac{2^2}{(1+1)^2}=2$ となるから $a_{k+1}\leqq 2$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(ｉ)(ⅱ)より $a_n\leqq 2$（$n=1,\ 2,\ \cdots$） となる。

したがって $1+\dfrac{0}{n^2}\leqq a_n\leqq 1+\dfrac{4}{n^2}$ が成り立ち，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)=1$ であるから

はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$