[東京工業大学 1987 年 $\boxed{1}$]

☆

$1>a>0,\ b \geqq c>0$ とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつならば，$-1<\alpha,\ \beta,\ \gamma<0$ となることを証明せよ。

☆

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと $f'(x)=3x^2+2ax+b$ である。

ここで，$f(-1)=-1+a-b+c<0$ であり，

$x \leqq -1$ のとき $f'(x)=x(3x+2a)+b>0$ であるから

$f(x)$ は $x \leqq -1$ の範囲で x 軸と交わることはない。

また，$f(0)=c>0$ であり，

$x \geqq 0$ のとき $f'(x)=x(3x+2a)+b>0$ であるから

$f(x)$ は $x \geqq 0$ の範囲で x 軸と交わることはない。

よって $x^3+ax^2+bx+c=0$ が 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつならば，$-1<\alpha,\ \beta,\ \gamma<0$ となる。

[東京工業大学 1987 年 $\boxed{2}$]

☆ ☆

xy 平面上の点 $P_0(x_0,\ y_0)$ が与えられている。

点列 $P_n(x_n,\ y_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$ と定める。このとき次の問に答えよ。

(1) $x_n+y_n,\ x_n-2y_n$ をそれぞれ $x_0,\ y_0$ で表せ。

(2) $(x_0,\ y_0)\neq(0,\ 0)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{x_n}^2}{{x_n}^2+{y_n}^2}$ を求めよ。

☆ ☆

(1) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ より $x_n=\dfrac{3}{2}x_{n-1}+y_{n-1}$， $y_n=\dfrac{1}{2}x_{n-1}+y_{n-1}$ なので

$x_n+y_n=2(x_{n-1}+y_{n-1})$ から $x_n+y_n=2^n(x_0+y_0)$ …①

$x_n-2y_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-2y_{n-1})$ から $x_n-2y_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(x_0-2y_0)$ …②

(2) ①，②より

$$x_n=\frac{1}{3}\left\{2^{n+1}(x_0+y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_0-2y_0)\right\}$$

$$y_n=\frac{1}{3}\left\{2^n(x_0+y_0)-\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_0-2y_0)\right\}$$

このとき

$${x_n}^2=\frac{1}{3^2}\left\{2^{2n+2}(x_0+y_0)^2+4(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0-2y_0)^2\right\}$$

$${y_n}^2=\frac{1}{3^2}\left\{2^{2n}(x_0+y_0)^2-2(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0-2y_0)^2\right\}$$

$$x_n{}^2+y_n{}^2=\frac{1}{3^2}\left\{5\cdot 2^{2n}(x_0+y_0)^2+2(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}(x_0-2y_0)^2\right\}$$

よって

$$\frac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{\frac{1}{3^2}\left\{2^{2n+2}(x_0+y_0)^2+4(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0-2y_0)^2\right\}}{\frac{1}{3^2}\left\{5\cdot 2^{2n}(x_0+y_0)^2+2(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}(x_0-2y_0)^2\right\}}$$

$$=\frac{4(x_0+y_0)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}(x_0-2y_0)^2}{5(x_0+y_0)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}(x_0-2y_0)^2}$$ となる。

したがって

$x_0+y_0=0$ のとき $\dfrac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\dfrac{1}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{1}{2}$

$x_0+y_0\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{4}{5}$

［ **東京工業大学 1987 年 $\boxed{3}$** ］

☆────────────────────────────────────☆

xy 平面上に 3 点 A, B, C がある。 A, B, C を内部または周上に含む半径最小の円を D とする。

(1) 三角形 ABC が鋭角三角形または直角三角形のとき， D は三角形 ABC の外接円となることを証明せよ。

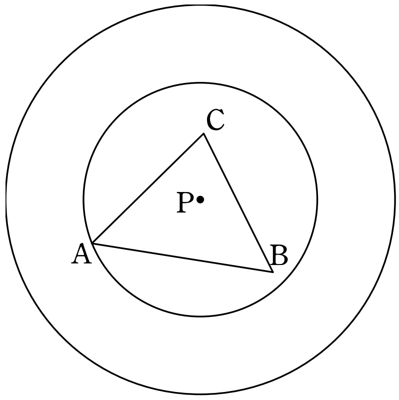
(2) $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$ とし， $\mathrm{C}(x,\ y)$ は条件 $x^2+y^2 \leqq 4,\ y \neq 0$ を満たしながら動く。円 D が三角形 ABC の外接円と異なるような C の動きうる範囲を図示せよ。

☆────────────────────────────────────☆

(1)（ｉ）3 点 A, B, C が中心 P の円の内部にあるとき，

3 点 A, B, C は中心 P，半径 $\max\{\mathrm{PA},\ \mathrm{PB},\ \mathrm{PC}\}$ の円の内部または周上にある。

したがって，3 点のうち少なくとも 1 つが円周上にある場合を考えればよい。



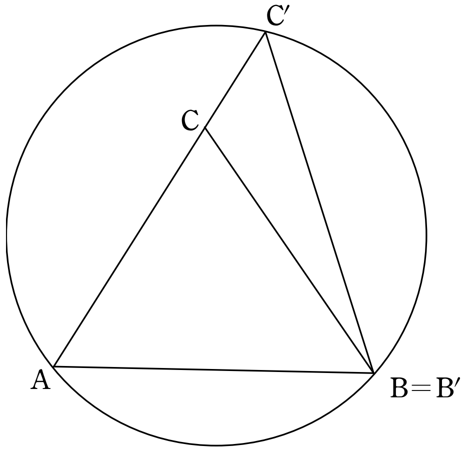
（ⅱ）点 A が半径 R' の円周上にあり，2 点 B, C のうち少なくとも 1 点が円の内部にあるとき，

AB, AC の延長と円周との交点をそれぞれ B′, C′（ただし，B が円周上にあるとき B′ は B，C が円周上にあるとき，C′ は C とする）とすると，△ABC の内角は鋭角または直角であるから $\mathrm{BC} < \mathrm{B'C'}$ が成り立ち，△ABC の外接円の半径を R とすると，

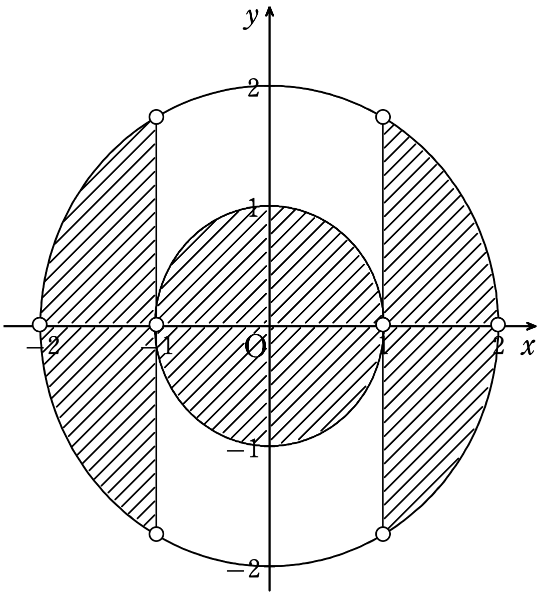
$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin \mathrm{A}} < \frac{\mathrm{B'C'}}{2\sin \mathrm{A}} = R'$$

となる。

（ｉ），（ⅱ）より 題意は示された。



(2) △ABC が鈍角三角形のときは，最も長い辺の中点を中心とし，半径を辺の長さの半分とする円を描けば，△ABC の外接円の半径よりも小さい半径の円ができる。よって円 D が△ABC の外接円と異なるような C の動きうる範囲は図の斜線部分になる。ただし，境界上の点は，円 $x^2+y^2=4$ の $-2<x<-1,\ 1<x<2$ の部分は含み，それ以外は含まない。



[東京工業大学 1987 年 $\boxed{4}$]

aを正数とし，媒介変数tによって表示された曲線$C: x=t+e^{at},\ y=-t+e^{at}$（$-\infty<t<\infty$）が$x$軸に接しているとする。このとき次の問に答えよ。

(1) aの値を求めよ。

(2) 2 直線$y=0,\ y=x$および曲線Cによって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $a>0$であり，$x=t+e^{at}$ から xはt に関して単調増加である。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1+ae^{at}}{1+ae^{at}}$$ より 曲線Cがx軸に接するとき $\frac{dy}{dx}=0$

よって $-1+ae^{at}=0$ …①

このときの t に対し $y=-t+e^{at}=0$ …② である。

②×aに①を代入して $t=\frac{1}{a}$ これを①に代入して $a=\frac{1}{e}$

(2) xはtに関して単調増加である。

また，$\frac{dy}{dt}=-1+ae^{at}=-1+\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}$ であり，

$\frac{dy}{dt}<0$ となるのは $-1+\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}<0 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{e}}<e \Leftrightarrow \frac{t}{e}<1 \Leftrightarrow t<e$

$\frac{dy}{dt}>0$ となるのは $t>e$

のときである。

$t=e$ のとき $x=e+e^1=2e$ なので，

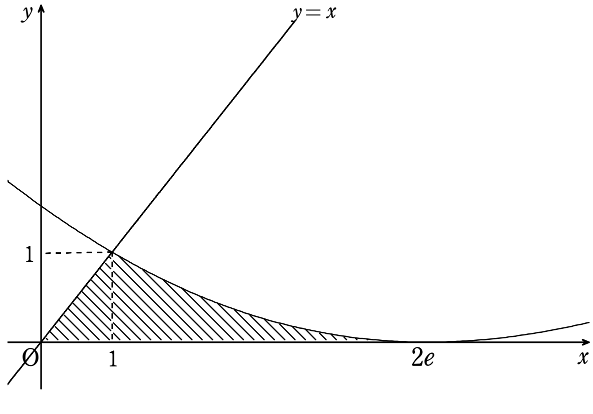
$x=2e$ までは単調に減少し，$x=2e$ からは単調に増加する。

また，$y=x$ とは点$(1, 1)$で交わる。

よって，2 直線$y=0,\ y=x$および曲線Cによって囲まれた部分の面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}+\int_1^{2e} y\,dx$$

である。



ここで，$x=t+e^{at},\ y=-t+e^{at}$ より $dx=(1+ae^{at})\,dt$ なので置換積分すると

$$S=\frac{1}{2}+\int_0^e(-t+e^{at})(1+ae^{at})\,dt$$

$a=\dfrac{1}{e}$ なので

$$S=\frac{1}{2}+\int_0^e(-t+e^{\frac{t}{e}})\left(1+\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^e\left(-t-\frac{t}{e}e^{\frac{t}{e}}+e^{\frac{t}{e}}+\frac{1}{e}e^{\frac{2t}{e}}\right)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^e\left(\frac{t}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt=\left[t\cdot e^{\frac{t}{e}}\right]_0^e-\int_0^e\left(e^{\frac{t}{e}}\right)dt$

$$=e^2-\left[e\cdot e^{\frac{t}{e}}\right]_0^e=e$$

であるから

$$S=\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}-e+e^2-e+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=e^2-2e$$

となる。

[東京工業大学 1987 年 $\boxed{5}$]

xy 平面上の点 A が原点 $(0,\ 0)$ から点 $(n,\ n)$（n は 3 以上の自然数）まで次の法則で動くものとする。

(i) A が点 $(k,\ \ell)$ にあるとき，$k<n,\ \ell<n$ ならば 2 点 $(k+1,\ \ell)$ または $(k,\ \ell+1)$ のどちらかに確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで動く。

(ii) A が点 $(n,\ \ell)$ $(\ell<n)$ にあるときは確率 1 で $(n,\ \ell+1)$ へ動き，点 $(k,\ n)$ $(k<n)$ にあるときは確率 1 で $(k+1,\ n)$ へ動く。

A が点 $(k,\ \ell)$ を通過する確率を $P(k,\ \ell)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $k,\ \ell=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき，$P(k,\ \ell)$ を求めよ。

(2) $P(n,\ 2)$ を求めよ。

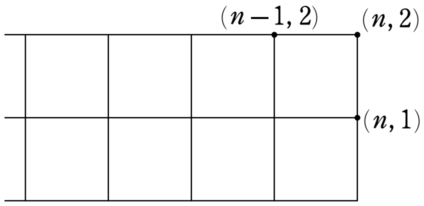
---

(1) 原点 $(0,\ 0)$ から点 $(k,\ \ell)$（$k,\ \ell=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）まで行く 1 つの道に対しての確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+\ell}$

であり，原点 $(0,\ 0)$ から点 $(k,\ \ell)$ まで行く方法は，右に k 回，上に ℓ 回動くので ${}_{k+\ell}\mathrm{C}_k$ 通りある。

よって，点 A が $(k,\ \ell)$ を通過する確率 $P(k,\ \ell)$ は ${}_{k+\ell}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+\ell}$

(2) $(n,\ 2)$ に到達するためには，$(n-1,\ 2)$ または $(n,\ 1)$ のいずれか一方を必ず通る。



$(n-1,\ 2)$ を通って $(n,\ 2)$ に到達する確率は ${}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)={}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

また，$(n,\ 1)$ を通って $(n,\ 2)$ に到達する確率は $(n-1,\ 1)$ を通って $(n,\ 1)$ に到達し，その後 $(n,\ 2)$ に到達する場合と，$(n,\ 0)$ を通って $(n,\ 1)$ に到達し，その後 $(n,\ 2)$ に到達する場合に分けられ，その

確率は ${}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)\times1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times1\times1={}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって　$P(n,\ 2) = {}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$$= \frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\left\{(n+1)n + 4n + 8\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\left(n^2 + 5n + 8\right)$$