[東京工業大学 1987 年 $\boxed{1}$]

$1 > a > 0,\ b \geqq c > 0$ とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつならば, $-1 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < 0$ となることを証明せよ。

[東京工業大学 1987 年 $\boxed{2}$]

xy 平面上の点 $P_0(x_0,\ y_0)$ が与えられている。

点列 $P_n(x_n,\ y_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$ と定める。このとき次の問に答えよ。

(1) $x_n + y_n,\ x_n - 2y_n$ をそれぞれ $x_0,\ y_0$ で表せ。

(2) $(x_0,\ y_0) \neq (0, 0)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{x_n}^2}{{x_n}^2+{y_n}^2}$ を求めよ。

[東京工業大学 1987 年 $\boxed{3}$]

xy 平面上に 3 点 A, B, C がある。A, B, C を内部または周上に含む半径最小の円を D とする。

(1) 三角形 ABC が鋭角三角形または直角三角形のとき，D は三角形 ABC の外接円となることを証明せよ。

(2) A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ とし，C$(x,\ y)$ は条件 $x^2+y^2 \leqq 4,\ y \neq 0$ を満たしながら動く。円 D が三角形 ABC の外接円と異なるような C の動きうる範囲を図示せよ。

[東京工業大学 1987 年 $\boxed{4}$]

a を正数とし，媒介変数 t によって表示された曲線 $C : x = t + e^{at},\ y = -t + e^{at}$ （$-\infty < t < \infty$）が x 軸に接しているとする。このとき次の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 2 直線 $y = 0,\ y = x$ および曲線 C によって囲まれた部分の面積を求めよ。

[東京工業大学 1987 年 $\boxed{5}$]

xy 平面上の点 A が原点 $(0,\ 0)$ から点 $(n,\ n)$（n は 3 以上の自然数）まで次の法則で動くものとする。

(ⅰ) A が点 $(k,\ \ell)$ にあるとき，$k<n,\ \ell<n$ ならば 2 点 $(k+1,\ \ell)$ または $(k,\ \ell+1)$ のどちらかに確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで動く。

(ⅱ) A が点 $(n,\ \ell)$ $(\ell<n)$ にあるときは確率 1 で $(n,\ \ell+1)$ へ動き，点 $(k,\ n)$ $(k<n)$ にあるときは確率 1 で $(k+1,\ n)$ へ動く。

A が点 $(k,\ \ell)$ を通過する確率を $P(k,\ \ell)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $k,\ \ell=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき，$P(k,\ \ell)$ を求めよ。

(2) $P(n,\ 2)$ を求めよ。