[東京工業大学 1987 年 $\boxed{5}$]

xy 平面上の点 A が原点 $(0,\ 0)$ から点 $(n,\ n)$（n は 3 以上の自然数）まで次の法則で動くものとする。

(i) A が点 $(k,\ \ell)$ にあるとき，$k<n,\ \ell<n$ ならば 2 点 $(k+1,\ \ell)$ または $(k,\ \ell+1)$ のどちらかに確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで動く。

(ii) A が点 $(n,\ \ell)$ $(\ell<n)$ にあるときは確率 1 で $(n,\ \ell+1)$ へ動き，点 $(k,\ n)$ $(k<n)$ にあるときは確率 1 で $(k+1,\ n)$ へ動く。

A が点 $(k,\ \ell)$ を通過する確率を $P(k,\ \ell)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $k,\ \ell=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき，$P(k,\ \ell)$ を求めよ。

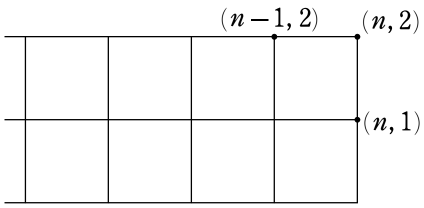
(2) $P(n,\ 2)$ を求めよ。

(1) 原点 $(0,\ 0)$ から点 $(k,\ \ell)$（$k,\ \ell=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）まで行く 1 つの道に対しての確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+\ell}$

であり，原点 $(0,\ 0)$ から点 $(k,\ \ell)$ まで行く方法は，右に k 回，上に ℓ 回動くので ${}_{k+\ell}\mathrm{C}_k$ 通りある。

よって，点 A が $(k,\ \ell)$ を通過する確率 $P(k,\ \ell)$ は ${}_{k+\ell}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+\ell}$

(2) $(n,\ 2)$ に到達するためには，$(n-1,\ 2)$ または $(n,\ 1)$ のいずれか一方を必ず通る。



$(n-1,\ 2)$ を通って $(n,\ 2)$ に到達する確率は ${}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)={}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

また，$(n,\ 1)$ を通って $(n,\ 2)$ に到達する確率は $(n-1,\ 1)$ を通って $(n,\ 1)$ に到達し，その後 $(n,\ 2)$ に到達する場合と，$(n,\ 0)$ を通って $(n,\ 1)$ に到達し，その後 $(n,\ 2)$ に到達する場合に分けられ，その

確率は ${}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)\times1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times1\times1={}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって　$P(n,\,2) = {}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + {}_{n}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$$= \frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\left\{(n+1)n + 4n + 8\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\left(n^2 + 5n + 8\right)$$