[東京工業大学 1987 年 $\boxed{4}$]

a を正数とし，媒介変数 t によって表示された曲線 $C: x=t+e^{at},\ y=-t+e^{at}$ （$-\infty<t<\infty$）が x 軸に接しているとする。このとき次の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 2 直線 $y=0,\ y=x$ および曲線 C によって囲まれた部分の面積を求めよ。

---

(1) $a>0$ であり， $x=t+e^{at}$ から x は t に関して単調増加である。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1+ae^{at}}{1+ae^{at}}$ より 曲線 C が x 軸に接するとき $\dfrac{dy}{dx}=0$

よって $-1+ae^{at}=0$ …①

このときの t に対し $y=-t+e^{at}=0$ …② である。

②×a に①を代入して $t=\dfrac{1}{a}$ これを①に代入して $a=\dfrac{1}{e}$

(2) x は t に関して単調増加である。

また， $\dfrac{dy}{dt}=-1+ae^{at}=-1+\dfrac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}$ であり，

$\dfrac{dy}{dt}<0$ となるのは $-1+\dfrac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}<0 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{e}}<e \Leftrightarrow \dfrac{t}{e}<1 \Leftrightarrow t<e$

$\dfrac{dy}{dt}>0$ となるのは $t>e$

のときである。

$t=e$ のとき $x=e+e^1=2e$ なので，

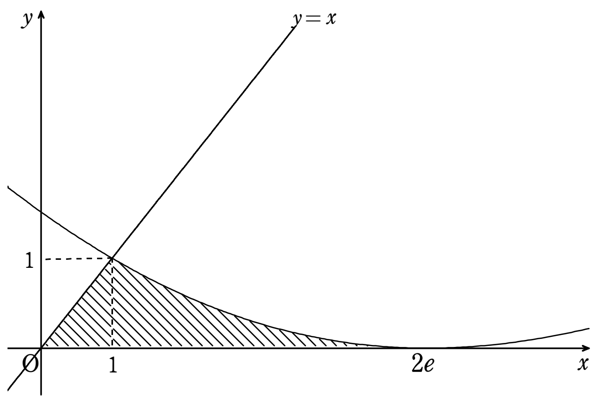
$x=2e$ までは単調に減少し， $x=2e$ からは単調に増加する。

また， $y=x$ とは点 $(1,1)$ で交わる。

よって，2 直線 $y=0,\ y=x$ および曲線 C によって囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}+\int_1^{2e} y\,dx$$

である。



ここで，$x=t+e^{at}$, $y=-t+e^{at}$ より $dx=(1+ae^{at})\,dt$ なので置換積分すると

$$S=\frac{1}{2}+\int_0^e(-t+e^{at})(1+ae^{at})\,dt$$

$a=\dfrac{1}{e}$ なので

$$S=\frac{1}{2}+\int_0^e(-t+e^{\frac{t}{e}})\left(1+\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^e\left(-t-\frac{t}{e}e^{\frac{t}{e}}+e^{\frac{t}{e}}+\frac{1}{e}e^{\frac{2t}{e}}\right)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^e\left(\frac{t}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt=\left[t\cdot e^{\frac{t}{e}}\right]_0^e-\int_0^e\left(e^{\frac{t}{e}}\right)dt$

$$=e^2-\left[e\cdot e^{\frac{t}{e}}\right]_0^e=e$$

であるから

$$S=\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}-e+e^2-e+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=e^2-2e$$

となる。