[東京工業大学 1987 年 $\boxed{3}$]

☆――――☆

xy 平面上に 3 点 A, B, C がある。A, B, C を内部または周上に含む半径最小の円を D とする。

(1) 三角形 ABC が鋭角三角形または直角三角形のとき，D は三角形 ABC の外接円となることを証明せよ。

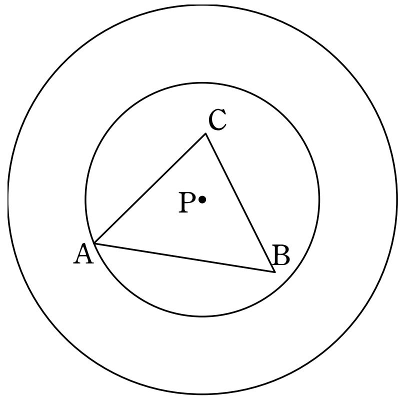
(2) A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ とし，C$(x,\ y)$ は条件 $x^2+y^2 \leqq 4,\ y \neq 0$ を満たしながら動く。円 D が三角形 ABC の外接円と異なるような C の動きうる範囲を図示せよ。

☆――――☆

(1)（ i ）3 点 A, B, C が中心 P の円の内部にあるとき，

3 点 A, B, C は中心 P，半径 max{PA, PB, PC} の円の内部または周上にある。

したがって，3 点のうち少なくとも 1 つが円周上にある場合を考えればよい。



（ii）点 A が半径 R' の円周上にあり，2 点 B, C のうち少なくとも 1 点が円の内部にあるとき，

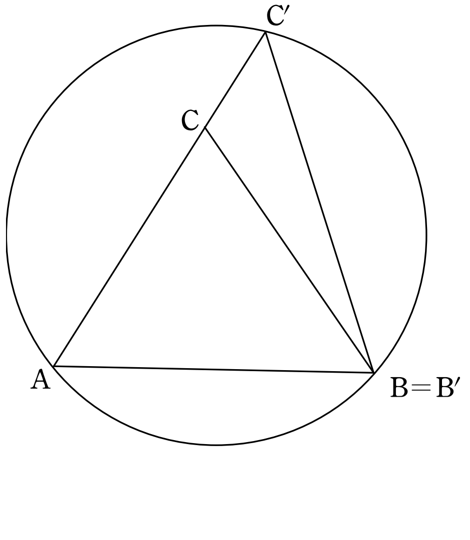
AB, AC の延長と円周との交点をそれぞれ B′, C′（ただし，B が円周上にあるとき B′ は B，C が円周上にあるとき，C′ は C とする）とすると，△ABC の内角は鋭角または直角であるから

$\mathrm{BC} < \mathrm{B'C'}$ が成り立ち，△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin \mathrm{A}}<\frac{\mathrm{B'C'}}{2\sin \mathrm{A}}=R'$$

となる。

（ i ），（ii）より 題意は示された。



(2) △ABC が鈍角三角形のときは，最も長い辺の中点を中心とし，半径を辺の長さの半分とする円を描けば，△ABC の外接円の半径よりも小さい半径の円ができる。よって円 D が△ABC の外接円と異なるような C の動きうる範囲は図の斜線部分になる。ただし，境界上の点は，円 $x^2+y^2=4$ の $-2<x<-1, 1<x<2$ の部分は含み，それ以外は含まない。