[東京工業大学 1987 年 $\boxed{2}$]

---

xy 平面上の点 $P_0(x_0,\ y_0)$ が与えられている。

点列 $P_n(x_n,\ y_n)\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$ と定める。このとき次の問に答えよ。

(1) $x_n+y_n,\ x_n-2y_n$ をそれぞれ $x_0,\ y_0$ で表せ。

(2) $(x_0,\ y_0)\neq(0, 0)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{x_n}^2}{{x_n}^2+{y_n}^2}$ を求めよ。

---

(1) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ より $x_n=\dfrac{3}{2}x_{n-1}+y_{n-1}$， $y_n=\dfrac{1}{2}x_{n-1}+y_{n-1}$ なので

$x_n+y_n=2(x_{n-1}+y_{n-1})$ から $x_n+y_n=2^n(x_0+y_0)$ …①

$x_n-2y_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-2y_{n-1})$ から $x_n-2y_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(x_0-2y_0)$ …②

(2) ①，②より

$$x_n=\frac{1}{3}\left\{2^{n+1}(x_0+y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_0-2y_0)\right\}$$

$$y_n=\frac{1}{3}\left\{2^n(x_0+y_0)-\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_0-2y_0)\right\}$$

このとき

$${x_n}^2=\frac{1}{3^2}\left\{2^{2n+2}(x_0+y_0)^2+4(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0-2y_0)^2\right\}$$

$${y_n}^2=\frac{1}{3^2}\left\{2^{2n}(x_0+y_0)^2-2(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0-2y_0)^2\right\}$$

$$x_n{}^2+y_n{}^2=\frac{1}{3^2}\left\{5\cdot 2^{2n}(x_0+y_0)^2+2(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}(x_0-2y_0)^2\right\}$$

よって

$$\frac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{\frac{1}{3^2}\left\{2^{2n+2}(x_0+y_0)^2+4(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0-2y_0)^2\right\}}{\frac{1}{3^2}\left\{5\cdot 2^{2n}(x_0+y_0)^2+2(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}(x_0-2y_0)^2\right\}}$$

$$=\frac{4(x_0+y_0)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}(x_0-2y_0)^2}{5(x_0+y_0)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0+y_0)(x_0-2y_0)+\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}(x_0-2y_0)^2}$$ となる。

したがって

$x_0+y_0=0$ のとき $\dfrac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\dfrac{1}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{1}{2}$

$x_0+y_0\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2}{x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{4}{5}$