[東京工業大学 1987 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$1 > a > 0,\ b \geqq c > 0$ とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつならば，$-1 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < 0$ となることを証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ である。

ここで， $f(-1) = -1 + a - b + c < 0$ であり，

$x \leqq -1$ のとき $f'(x) = x(3x + 2a) + b > 0$ であるから

$f(x)$ は $x \leqq -1$ の範囲で x 軸と交わることはない。

また， $f(0) = c > 0$ であり，

$x \geqq 0$ のとき $f'(x) = x(3x + 2a) + b > 0$ であるから

$f(x)$ は $x \geqq 0$ の範囲で x 軸と交わることはない。

よって $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつならば， $-1 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < 0$ となる。