[東京工業大学 1986 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

☆ ☆

$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ のとき $a_1 = 19^1 + (-1)^{1-1}2^{4-3} = 21 = 3\cdot 7$

$a_2 = 19^2 + (-1)^{2-1}2^{8-3} = 329 = 7\cdot 47$ であるから

$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数があるとすれば 7 である。

これが正しいことを数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n = 1$ のとき

$a_1 = 3\cdot 7$ より成り立つ。

(ⅱ) $n = k$ のとき

a_k が素数 7 で割り切れるとすると，$a_k = 19^k + (-1)^{k-1}2^{4k-3} = 7m$ （m は整数）と表せる。

このとき，$a_{k+1} = 19^{k+1} + (-1)^{k+1-1}2^{4(k+1)-3}$

$= 19\cdot 19^k + (-1)^k 2^{4k+1}$

仮定より $= 19\{7m - (-1)^{k-1}2^{4k-3}\} + (-1)^k 2^{4k+1}$

$= 7\cdot 19m - 19(-1)^{k-1}2^{4k-3} + (-1)^k\cdot 2^4\cdot 2^{4k-3}$

$= 7\cdot 19m + 19(-1)^k 2^{4k-3} + 16(-1)^k\cdot 2^{4k-3}$

$= 7\cdot 19m + 35(-1)^k 2^{4k-3}$

$= 7\{19m + 5(-1)^k 2^{4k-3}\}$ となり $n = k+1$ のときにも成り立つ。

(ｉ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は 7 で割り切れる。

したがって，求める素数は 7

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

空間内に正四面体ABCDがある。頂点A, Bは，直線$\ell_1 : x+y=-1,\ z=0$上にあり，頂点C, Dは直線$\ell_2 : x=y=-\dfrac{z-2}{2}$上にある。Aの$x$座標はBの$x$座標より大きく，Cの$z$座標はDの$z$座標より大きい。

(1) 辺ABの中点E，および辺CDの中点Fの座標を求めよ。

(2) 正四面体ABCDの1辺の長さを求めよ。

(3) 頂点Aの座標を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) ℓ_1, ℓ_2上の点をそれぞれ $\mathrm{P}(s,\ -s-1,\ 0),\ \mathrm{Q}(t,\ t,\ -2t+2)$ とおく。

このとき，$\mathrm{PQ}^2 = (t-s)^2 + (t+s+1)^2 + (-2t+2)^2$

$$= t^2 - 2st + s^2 + t^2 + s^2 + 1 + 2st + 2s + 2t + 4t^2 - 8t + 4$$

$$= 2s^2 + 2s + 6t^2 - 6t + 5$$

$$= 2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

よって，PQが最小となるのは $s=-\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{1}{2}$ のときで，

このときPはE，QはFに一致するから $\mathrm{E}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$

(2) 四面体ABCDは正四面体であり，EはABの中点だから $\mathrm{AB}:\mathrm{EF}=\sqrt{2}:1$ である。

(1)より $\mathrm{EF}=\sqrt{3}$ なので正四面体ABCDの1辺の長さは $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

(3) 直線ℓ_1の$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$と同じ向きの方向ベクトルを$\overrightarrow{\ell_1}$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{EA}}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\ell_1}}{|\overrightarrow{\ell_1}|}$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}\cdot(1,\ -1,\ 0)$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1,\ -1,\ 0)$$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

よって　$\mathrm{A}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

微分可能な関数 $y=f(x)$ が, 区間 $0\leqq x\leqq 1$ で正の値をとり, 次の 2 条件(ⅰ), (ⅱ)を満たすとする。

（ⅰ） $f(0)=2,\ f(1)=1$

（ⅱ） $0\leqq a<x\leqq 1$ である任意の a と x とに対して, 4 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\mathrm{C}(x,\ 0)$, $\mathrm{D}(x,\ f(x))$ を頂点とする四辺形 ABCD の面積と, 関数 $y=f(x)$ のグラフと線分 AB, BC および CD で囲まれる部分の面積との比が, a と x によらず一定である。

このような関数 $y=f(x)$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

題意より $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ と $\dfrac{\{f(a)+f(x)\}(x-a)}{2}$ の比が a と x によらず一定であるから

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=k\frac{\{f(a)+f(x)\}(x-a)}{2}$ （k は定数） …① と表せる。

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とおくと

① $\Leftrightarrow$ $F(x)-F(a)=k\dfrac{\{f(a)+f(x)\}(x-a)}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\dfrac{k}{2}\{f(a)+f(x)\}$

ここで, $x\to a$ とすると $f(a)=\dfrac{k}{2}\{f(a)+f(a)\}$ より $f(a)=k\,f(a)$

$f(a)>0$ なので $k=1$

$k=1$ ということは, $y=f(x)$ は直線ということに他ならない。

よって, 2 点 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式として $y=f(x)=-x+2$ を得る。

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{4}$]

☆―――☆

放物線 $y=-(x-p)^2+q$ の頂点が曲線 $y=x(x^2-3)$ 上にあり，これらの 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であるとする。このとき，これらの 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし，$0<p<2$ とする。

☆―――☆

放物線 $y=-(x-p)^2+q$ の頂点 $(p,\ q)$ は曲線 $y=x(x^2-3)$ 上にあるので $q=p(p^2-3)$ …①

$y=-(x-p)^2+q$ と $y=x(x^2-3)$ を連立して交点の x 座標を求めると

$x(x^2-3)=-(x-p)^2+q$

①より $x(x^2-3)=-(x-p)^2+p(p^2-3)$

$$x^3+x^2-(2p+3)x-p^3+p^2+3p=0$$

$$(x-p)\{x^2+(p+1)x+p^2-p-3\}=0$$

ここで，$x^2+(p+1)x+p^2-p-3=0$ の判別式を D とすると

$D=(p+1)^2-4(p^2-p-3)$

$=-3p^2+6p+13$

$=-3(p-1)^2+16$

より $0<p<2$ においては $D>0$ なので，

$x^2+(p+1)x+p^2-p-3=0$ は重解を持たない。

よって 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であることから $x=p$ という解を持つので，

$p^2+(p+1)p+p^2-p-3=0 \Leftrightarrow 3p^2=3 \Leftrightarrow p=\pm 1$

$0<p<2$ より $p=1$

このとき $x^2+(p+1)x+p^2-p-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1,\ -3$

よってもう 1 つの解は $x=-3$ である。

このとき，放物線の方程式は $y=-x^2+2x-3$ なので求める面積 S は

$S=\int_{-3}^{1}\{x(x^2-3)-(-x^2+2x-3)\}\,dx$

$=\int_{-3}^{1}(x-1)^2(x+3)\,dx$

$$= \int_{-3}^{1} (x-1)^2 (x-1+4)\, dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \{(x-1)^3 + 4(x-1)^2\}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{4}{3}(x-1)^3 \right]_{-3}^{1}$$

$$= -\left(64 - \frac{256}{3} \right)$$

$$= \frac{64}{3}$$

となる。

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{5}$]

$m,\ n$ を自然数とする。第 1 象限内の曲線 $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n}}=1$ と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m,\ n)$ をする。

(1) $A(m,1)$ を求めよ。

(2) $A(m,\ n+1)=\dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,\ n)$ であることを示せ。

(3) $A(m,\ n)$ を求めよ。

---

(1) $n=1$ のとき

$x^{\frac{1}{m}}+y=1 \Leftrightarrow y=-x^{\frac{1}{m}}+1$ より

$$A(m,1)=\int_0^1\left(-x^{\frac{1}{m}}+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1}+x\right]_0^1$$

$$=-\frac{m}{m+1}+1$$

$$=\frac{1}{m+1}$$

(2) $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n+1}}=1 \Leftrightarrow y=\left(-x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{n+1}$ より

$$A(m,\ n+1)=\int_0^1\left(-x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{n+1}dx$$

$t=-x^{\frac{1}{m}}+1$ とおくと $x=(1-t)^m$ より $dx=-m(1-t)^{m-1}dt$

$x:0\to1$ のとき $t:1\to0$ なので

$$A(m,\ n+1)=\int_1^0 t^{n+1}\cdot -m(1-t)^{m-1}dt$$

$$=m\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}dt$$

$$= m\left\{\left[t^{n+1}\cdot -\frac{(1-t)^m}{m}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \cdot -\frac{(1-t)^m}{m}\,dt\right\}$$

$$= (n+1)\int_0^1 t^n (1-t)^m\,dt$$

同様にして $A(m+1,\ n) = \int_0^1 \left(-x^{\frac{1}{m+1}}+1\right)^n dx$

$$= (m+1)\int_0^1 t^n (1-t)^m\,dt$$

したがって $A(m,\ n+1) = \dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,\ n)$

(3) (2)の結果を繰り返し用いると

$$A(m,\ n) = \frac{n}{m+1}A(m+1,\ n-1)$$

$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}A(m+2,\ n-2)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}\cdot A(m+n-1,\ 1)$$

ここで, $A(m+n-1,\ 1) = \dfrac{1}{m+n}$ より

$$A(m,\ n) = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)(m+n)}$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n)!}$$