[東京工業大学 1986 年 $\boxed{1}$]

整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1} 2^{4n-3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{2}$]

空間内に正四面体ABCDがある。頂点A, Bは，直線$\ell_1 : x+y=-1,\ z=0$上にあり，頂点C, Dは直線$\ell_2 : x=y=-\dfrac{z-2}{2}$上にある。Aの$x$座標はBの$x$座標より大きく，Cの$z$座標はDの$z$座標より大きい。

(1) 辺ABの中点E，および辺CDの中点Fの座標を求めよ。

(2) 正四面体ABCDの１辺の長さを求めよ。

(3) 頂点Aの座標を求めよ。

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

微分可能な関数 $y=f(x)$ が, 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で正の値をとり, 次の 2 条件(ⅰ), (ⅱ)を満たすとする。

(ⅰ) $f(0)=2,\ f(1)=1$

(ⅱ) $0 \leqq a < x \leqq 1$ である任意の a と x とに対して, 4 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\mathrm{C}(x,\ 0)$, $\mathrm{D}(x,\ f(x))$ を頂点とする四辺形ABCDの面積と, 関数 $y=f(x)$ のグラフと線分AB, BCおよびCDで囲まれる部分の面積との比が, a と x によらず一定である。

このような関数 $y=f(x)$ を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{4}$]

放物線 $y=-(x-p)^2+q$ の頂点が曲線 $y=x(x^2-3)$ 上にあり，これらの 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であるとする。このとき，これらの 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし，$0<p<2$ とする。

[東京工業大学 1986 年 $\boxed{5}$]

$m,\ n$ を自然数とする。第 1 象限内の曲線 $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n}}=1$ と x 軸, y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m,\ n)$ をする。

(1) $A(m,\ 1)$ を求めよ。

(2) $A(m,\ n+1)=\dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,\ n)$ であることを示せ。

(3) $A(m,\ n)$ を求めよ。