[東京工業大学 1986 年 $\boxed{5}$]

☆ ――― ☆

$m,\ n$ を自然数とする。第 1 象限内の曲線 $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n}}=1$ と x 軸， y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m,\ n)$ をする。

(1) $A(m,\ 1)$ を求めよ。

(2) $A(m,\ n+1)=\dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,\ n)$ であることを示せ。

(3) $A(m,\ n)$ を求めよ。

☆ ――― ☆

(1) $n=1$ のとき

$x^{\frac{1}{m}}+y=1 \Leftrightarrow y=-x^{\frac{1}{m}}+1$ より

$$A(m,\ 1)=\int_0^1\left(-x^{\frac{1}{m}}+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1}+x\right]_0^1$$

$$=-\frac{m}{m+1}+1$$

$$=\frac{1}{m+1}$$

(2) $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n+1}}=1 \Leftrightarrow y=\left(-x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{n+1}$ より

$$A(m,\ n+1)=\int_0^1\left(-x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{n+1}dx$$

$t=-x^{\frac{1}{m}}+1$ とおくと $x=(1-t)^m$ より $dx=-m(1-t)^{m-1}dt$

$x:0\to1$ のとき $t:1\to0$ なので

$$A(m,\ n+1)=\int_1^0 t^{n+1}\cdot-m(1-t)^{m-1}dt$$

$$=m\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}dt$$

$$= m\left\{\left[t^{n+1}\cdot -\frac{(1-t)^m}{m}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n\cdot -\frac{(1-t)^m}{m}\,dt\right\}$$

$$= (n+1)\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$$

同様にして $A(m+1,\ n) = \int_0^1 \left(-x^{\frac{1}{m+1}}+1\right)^n dx$

$$= (m+1)\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$$

したがって $A(m,\ n+1) = \dfrac{n+1}{m+1}A(m+1,\ n)$

(3) (2)の結果を繰り返し用いると

$$A(m,\ n) = \frac{n}{m+1}A(m+1,\ n-1)$$

$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}A(m+2,\ n-2)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}\cdot A(m+n-1,\ 1)$$

ここで, $A(m+n-1,\ 1) = \dfrac{1}{m+n}$ より

$$A(m,\ n) = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)(m+n)}$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n)!}$$