[東京工業大学 1986 年 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

放物線 $y=-(x-p)^2+q$ の頂点が曲線 $y=x(x^2-3)$ 上にあり，これらの 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であるとする。このとき，これらの 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし，$0<p<2$ とする。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

放物線 $y=-(x-p)^2+q$ の頂点 $(p,\ q)$ は曲線 $y=x(x^2-3)$ 上にあるので $q=p(p^2-3)$ …①

$y=-(x-p)^2+q$ と $y=x(x^2-3)$ を連立して交点の x 座標を求めると

$x(x^2-3)=-(x-p)^2+q$

①より $x(x^2-3)=-(x-p)^2+p(p^2-3)$

$x^3+x^2-(2p+3)x-p^3+p^2+3p=0$

$(x-p)\{x^2+(p+1)x+p^2-p-3\}=0$

ここで，$x^2+(p+1)x+p^2-p-3=0$ の判別式を D とすると

$D=(p+1)^2-4(p^2-p-3)$

$=-3p^2+6p+13$

$=-3(p-1)^2+16$

より $0<p<2$ においては $D>0$ なので，

$x^2+(p+1)x+p^2-p-3=0$ は重解を持たない。

よって 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であることから $x=p$ という解を持つので，

$p^2+(p+1)p+p^2-p-3=0 \iff 3p^2=3 \iff p=\pm 1$

$0<p<2$ より $p=1$

このとき $x^2+(p+1)x+p^2-p-3=0 \iff x^2+2x-3=0 \iff (x+3)(x-1)=0 \iff x=1,\ -3$

よってもう 1 つの解は $x=-3$ である。

このとき，放物線の方程式は $y=-x^2+2x-3$ なので求める面積 S は

$S=\int_{-3}^{1}\{x(x^2-3)-(-x^2+2x-3)\}\,dx$

$=\int_{-3}^{1}(x-1)^2(x+3)\,dx$

$$= \int_{-3}^{1} (x-1)^2 (x-1+4)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \{(x-1)^3 + 4(x-1)^2\}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{4}{3}(x-1)^3 \right]_{-3}^{1}$$

$$= -\left(64 - \frac{256}{3} \right)$$

$$= \frac{64}{3}$$

となる。