[東京工業大学 1986 年 $\boxed{3}$]

微分可能な関数 $y=f(x)$ が, 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で正の値をとり, 次の 2 条件(ⅰ), (ⅱ)を満たすとする。

（ⅰ） $f(0)=2,\ f(1)=1$

（ⅱ） $0 \leqq a < x \leqq 1$ である任意の a と x とに対して, 4 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\mathrm{C}(x,\ 0)$, $\mathrm{D}(x,\ f(x))$ を頂点とする四辺形ABCD の面積と, 関数 $y=f(x)$ のグラフと線分 AB, BC および CD で囲まれる部分の面積との比が, a と x によらず一定である。

このような関数 $y=f(x)$ を求めよ。

題意より $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ と $\dfrac{\{f(a)+f(x)\}(x-a)}{2}$ の比が a と x によらず一定であるから

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = k\frac{\{f(a)+f(x)\}(x-a)}{2}$ （k は定数） …① と表せる。

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とおくと

① $\Leftrightarrow$ $F(x)-F(a)=k\dfrac{\{f(a)+f(x)\}(x-a)}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\dfrac{k}{2}\{f(a)+f(x)\}$

ここで, $x \to a$ とすると $f(a)=\dfrac{k}{2}\{f(a)+f(a)\}$ より $f(a)=k\,f(a)$

$f(a)>0$ なので $k=1$

$k=1$ ということは, $y=f(x)$ は直線ということに他ならない。

よって, 2 点 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式として $y=f(x)=-x+2$ を得る。