[東京工業大学 1986 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

空間内に正四面体ABCDがある。頂点A, Bは，直線$\ell_1: x+y=-1,\ z=0$上にあり，頂点C, Dは直線$\ell_2: x=y=-\dfrac{z-2}{2}$上にある。Aの$x$座標はBの$x$座標より大きく，Cの$z$座標はDの$z$座標より大きい。

(1) 辺ABの中点E，および辺CDの中点Fの座標を求めよ。

(2) 正四面体ABCDの1辺の長さを求めよ。

(3) 頂点Aの座標を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) ℓ_1, ℓ_2上の点をそれぞれ $\mathrm{P}(s,\ -s-1,\ 0),\ \mathrm{Q}(t,\ t,\ -2t+2)$ とおく。

このとき，$\mathrm{PQ}^2=(t-s)^2+(t+s+1)^2+(-2t+2)^2$

$$=t^2-2st+s^2+t^2+s^2+1+2st+2s+2t+4t^2-8t+4$$

$$=2s^2+2s+6t^2-6t+5$$

$$=2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+3$$

よって，PQが最小となるのは $s=-\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{1}{2}$ のときで，

このときPはE，QはFに一致するから $\mathrm{E}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$

(2) 四面体ABCDは正四面体であり，EはABの中点だから $\mathrm{AB}:\mathrm{EF}=\sqrt{2}:1$ である。

(1)より $\mathrm{EF}=\sqrt{3}$ なので正四面体ABCDの1辺の長さは $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

(3) 直線ℓ_1の$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$と同じ向きの方向ベクトルを$\overrightarrow{\ell_1}$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\ell_1}}{|\overrightarrow{\ell_1}|}$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}\cdot(1,\ -1,\ 0)$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1,\ -1,\ 0)$$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

よって $\mathrm{A}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$