[東京工業大学 1986 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ のとき $a_1 = 19^1 + (-1)^{1-1}2^{4-3} = 21 = 3\cdot 7$

$a_2 = 19^2 + (-1)^{2-1}2^{8-3} = 329 = 7\cdot 47$ であるから

$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数があるとすれば 7 である。

これが正しいことを数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n = 1$ のとき

$a_1 = 3\cdot 7$ より成り立つ。

(ⅱ) $n = k$ のとき

a_k が素数 7 で割り切れるとすると，$a_k = 19^k + (-1)^{k-1}2^{4k-3} = 7m$ （m は整数）と表せる。

このとき，$a_{k+1} = 19^{k+1} + (-1)^{k+1-1}2^{4(k+1)-3}$

$= 19\cdot 19^k + (-1)^k 2^{4k+1}$

仮定より $= 19\{7m - (-1)^{k-1}2^{4k-3}\} + (-1)^k 2^{4k+1}$

$= 7\cdot 19m - 19(-1)^{k-1}2^{4k-3} + (-1)^k \cdot 2^4 \cdot 2^{4k-3}$

$= 7\cdot 19m + 19(-1)^k 2^{4k-3} + 16(-1)^k \cdot 2^{4k-3}$

$= 7\cdot 19m + 35(-1)^k 2^{4k-3}$

$= 7\{19m + 5(-1)^k 2^{4k-3}\}$ となり $n = k+1$ のときにも成り立つ。

(ｉ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は 7 で割り切れる。

したがって，求める素数は 7