[東京工業大学 1985 年 $\boxed{1}$]

2 つの条件

(i) $a^2-2b^2=1$ または $a^2-2b^2=-1$

(ii) $a+\sqrt{2}b>0$

を満たす任意の整数$a,\ b$から得られる実数 $g=a+\sqrt{2}b$ 全体の集合をGとする。1 より大きいGの元のうち最小のものをuとする。

(1) uを求めよ。

(2) 整数nとGの元gに対し，gu^nはGの元であることを示せ。

(3) Gの任意の元gは適当な整数mによって，$g=u^m$と書かれることを示せ。

(1) $a^2-2b^2=1$ より $\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a-\sqrt{2}b\right)=1$ …①

$a^2-2b^2=-1$ より $\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a-\sqrt{2}b\right)=-1$ …②

uは 1 より大きいので，$a+\sqrt{2}b>1$ のとき

①より $0<a-\sqrt{2}b<1$ …③

②より $-1<a-\sqrt{2}b<0$ …④

ここで，条件 $a+\sqrt{2}b>0$ より ③から$a>0$，④から$b>0$ でなければならない。

よってuは，$a=b=1$ のときで $u=1+\sqrt{2}$

(2) $g=a+\sqrt{2}b,\ h=c+\sqrt{2}d$ （$a,\ b,\ c,\ d$は条件(i)，(ii)を満たす整数）とおく。

$$gh=\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(c+\sqrt{2}d\right)$$

$$=ac+2bd+\sqrt{2}\left(ad+bc\right)$$

であり，

$$\left(ac+2bd\right)^2-2\left(ad+bc\right)^2=a^2c^2+4abcd+4b^2d^2-2a^2d^2-4abcd-2b^2c^2$$

$$=a^2c^2+4b^2d^2-2a^2d^2-2b^2c^2$$

$$=\left(a^2-2b^2\right)\left(c^2-2d^2\right)$$

$$=\pm 1$$

$$\left(ac+2bd\right)+\sqrt{2}\left(ad+bc\right)=\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(c+\sqrt{2}d\right)$$

$$>0$$

であるから，$gh\in G$ である。

また，$g^{-1}=\dfrac{1}{a+\sqrt{2}b}$

$$=\frac{a-\sqrt{2}b}{a^2-2b^2}$$

$$=\pm\left(a-\sqrt{2}b\right)$$

$$=\pm a\mp\sqrt{2}b\in G$$

よって，整数nと $g\in G$ に対して $gu^n\in G$ である。

(3) $g\in G$ である任意のgに対し，適当な整数mをとると

$$u^{m-1}<g\leqq u^m$$

とすることができる。

両辺に $u^{-m+1}>0$ をかけると

$$1<gu^{-m+1}\leqq u$$

(1)よりuは1より大きいGの最小の元であるから

$$gu^{-m+1}=u$$

となる。よって $g=u^m$

［ **東京工業大学 1985 年 $\boxed{2}$** ］

☆────────────────────────────☆

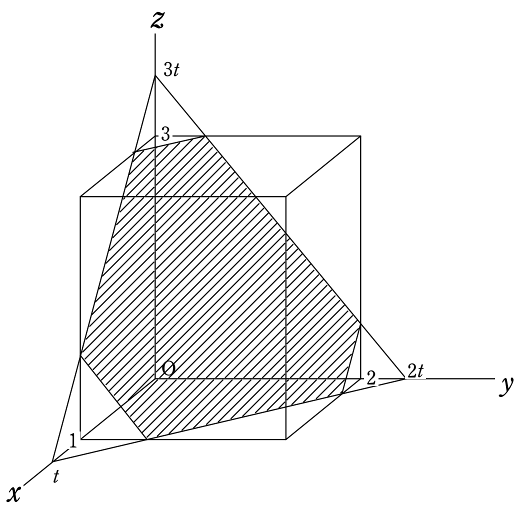
空間内において，6 枚の平面 $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=3$ で囲まれてできる直方体を V とする。$0<t<3$ である実数 t に対し，平面 $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=t$ で V を 2 分したとき，小さい方の体積（等しいときは，どちらでもよい）を $f(t)$ とする。

(1) $f(t)$ を求めよ。

(2) $f(t)$ を t の関数と考えたとき，$t=1$ および $t=\dfrac{3}{2}$ で微分可能であるか。

☆────────────────────────────☆

(1) $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=t$ と 6 枚の平面との位置関係は図のようになり，



$t=1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$ の前後で切り口の形が変わる。

（ⅰ）$0<t\leqq 1$ のとき，切り口は三角形になる。

$f(t)$ は三角錐の体積となるから

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot 2t\cdot 3t\cdot\frac{1}{3}=t^3$$

（ⅱ）$1\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき，切り口は六角形になる。

三角錐から直方体の外に出た部分を除けばよい。

外に出た部分は同じ形の三角錐であるから

$$f(t)=t^3-\frac{1}{2}\cdot(t-1)\cdot 2(t-1)\cdot 3(t-1)\cdot\frac{1}{3}\times 3$$

$$=-2t^3+9t^2-9t+3$$

（ⅲ）$\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq 2$ のとき，切り口は六角形になる。

直方体から三角錐の部分を除けばよい。（ⅱ）の結果を利用して

$$f(t)=1\cdot 2\cdot 3-(-2t^3+9t^2-9t+3)$$

$$=2t^3-9t^2+9t+3$$

（ⅳ）$2\leqq t<3$ のとき，切り口は三角形になる。

（ⅰ）と同様にして　$f(t)=\dfrac{1}{2}\cdot(3-t)\cdot 2(3-t)\cdot 3(3-t)\cdot\dfrac{1}{3}=(3-t)^3$

以上より　$f(t)=\begin{cases} t^3 & (0<t\leqq 1) \\ -2t^3+9t^2-9t+3 & \left(1\leqq t\leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ 2t^3-9t^2+9t+3 & \left(\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq 2\right) \\ (3-t)^3 & (2\leqq t<3) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1-0}\frac{t^3-1}{t-1}$

$$=\lim_{t\to 1-0}(t^2+t+1)$$

$$=3$$

$$\lim_{t\to 1+0}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1+0}\frac{-2t^3+9t^2-9t+3-1}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+0}(-2t^2+7t-2)$$

$$=3$$

$$\lim_{t\to \frac{3}{2}-0}\frac{f(t)-f\left(\dfrac{3}{2}\right)}{t-\dfrac{3}{2}}=\lim_{t\to \frac{3}{2}-0}(-2t^2+6t)$$

$$=\frac{9}{2}$$

$$\lim_{t\to \frac{3}{2}+0}\frac{f(t)-f\left(\dfrac{3}{2}\right)}{t-\dfrac{3}{2}}=\lim_{t\to \frac{3}{2}-0}(2t^2-6t)$$

$$=-\frac{9}{2}$$

となるので，$f(t)$ は $t=1$ で微分可能で，$t=\dfrac{3}{2}$ で微分可能でない。

[東京工業大学 1985 年 $\boxed{3}$]

5 つの円 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 がある。O_1, O_2 は半径がそれぞれ 1 と a（$0<a<1$）の同心円である。O_3 は O_1 に内接し，O_2 と互いに外接する。O_4 は O_1 に内接し，O_2, O_3 と互いに外接する。O_5 は O_1 に内接し，O_3, O_4 と互いに外接する。ただし，O_2, O_3, O_4, O_5 の中心を A, B, C, D とするとき，D は B, C を通る直線に関して A の反対側にあるものとする。

(1) 四辺形 ABDC の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ の最大値を求めよ。

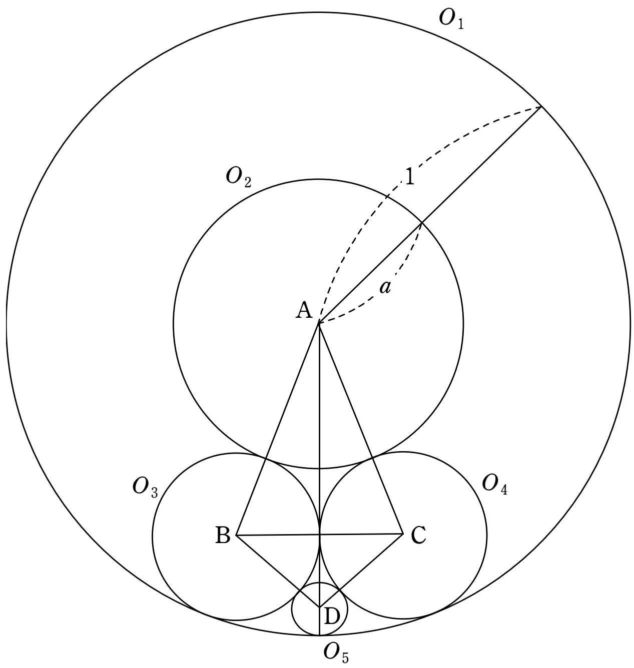
---

(1) 円の位置関係は図のようになり，

A, D を結ぶ直線 AD に関して対称である。

また，線分 BC と線分 AD は直交し，

その交点 H は 2 円 $\mathrm{O_3, O_4}$ の接点である。



円 $\mathrm{O_3, O_4}$ の半径は $\dfrac{1-a}{2}$ であり，

三平方の定理から $\mathrm{AH}^2+\left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2=\left(a+\dfrac{1-a}{2}\right)^2$

$$\mathrm{AH}^2=a$$

$$\mathrm{AH}=\sqrt{a}$$

さらに，円 $\mathrm{O_5}$ の半径を r とすると

$$\left(r+\frac{1-a}{2}\right)^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{a}+r\right)^2$$

$$\left(1-a+2-2\sqrt{a}\right)r=\left(1-\sqrt{a}\right)^2$$

$$r=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}{3-a-2\sqrt{a}}$$

よって四辺形 ABDC の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}{3-a-2\sqrt{a}}\right\}\cdot 2\cdot\frac{1-a}{2}$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)(1-a)}{\left(3+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)(1-a)}{3+\sqrt{a}}$$

(2) $\sqrt{a}=u$ とおくと $0<a<1$ より $0<u<1$

$S(a)=T(u)$

$$=\frac{(1+u)(1-u^2)}{3+u}$$

$$T'(u)=\frac{(1-2u-3u^2)(3+u)-(1+u-u^2-u^3)}{(3+u)^2}$$

$$=-\frac{2(u+1)(u^2+4u-1)}{(3+u)^2}$$

$T(u)$ の増減は次のようになる。

u	0	$\cdots$	$-2+\sqrt{5}$	$\cdots$	1
$T'(u)$		$+$	0	$-$	
$T(u)$		↗		↘	

$u=-2+\sqrt{5}$ のとき $T(u)$ は最大となり，そのとき $S(a)$ も最大になる。

よって 求める最大値は $T\left(-2+\sqrt{5}\right)=10\sqrt{5}-22$

［ 東京工業大学 1985 年 $\boxed{4}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

平面上の点$(0,\ 2)$を通る曲線C上の$x \neq 0$である任意の点$(x,\ y)$について，その点でのCの接線が点$\left(\dfrac{6x^3+1}{6x^2},\ 2y\right)$を通るという。この曲線の方程式を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

曲線Cの方程式を $y = f(x)$ とおく。

$x \neq 0$での任意の点$(x,\ y)$での接戦の方程式は $Y - y = f'(x)(X - x)$

これが $\left(\dfrac{6x^3+1}{6x^2},\ 2y\right)$ を通るから

$$2y - y = f'(x)\left(\frac{6x^3+1}{6x^2} - x\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(x)\cdot\frac{1}{6x^2}$$

よって $\dfrac{y'}{y} = 6x^2$ から $\log|y| = 2x^3 + C_1$ （C_1 ：積分定数）

$|y| = e^{2x^3+C_1} = e^{C_1}e^{2x^3}$ より $y = \pm e^{C_1}e^{2x^3} = Ce^{2x^3}$ （$C = \pm e^{C_1}$） となる。

曲線 $y = f(x)$ は点$(0,\ 2)$を通るから $f(0) = Ce^0 = 2$ より $C = 2$

したがって $y = 2e^{2x^3}$

[東京工業大学 1985 年 $\boxed{5}$]

☆─────────────────────────☆

1 から n までの整数を 1 枚に 1 つずつ書いた n 枚のカードの組を 3 組用意する。3 人がそれぞれ 1 組ずつを持ち，各人はその中から無作為に 1 枚のカードを抜き出し，そこに書かれた数によって得点を次のように A, B 2 通り定める。最大数を出した人が 1 人だけのとき，その人の得点は

A：自分の出した点　　B：他の人の出した数の和

とし，他の 2 人の得点は，A, B いずれの場合も 0 とする。最大数を出した人が 2 人以上のときは，A, B いずれの場合も，3 人の得点は 0 とする。各人の得点の期待値を，A, B それぞれの場合について，n を用いて表せ。

☆─────────────────────────☆

3 人を L, M, N とする。

L だけが最大数のカードを抜き出して得点を得るとき，その様子は次の表のようになる。

L	2	3	4	$\cdots$	n
M	1	1 or 2	1 or 2 or 3	$\cdots$	1 or 2 or $\cdots$ or $n-1$
N	1	1 or 2	1 or 2 or 3	$\cdots$	1 or 2 or $\cdots$ or $n-1$

(ｉ) A の場合

L の得点の期待値を $E_{\mathrm{A}}(X)$ とする。

L, M, N 3 人のカードの抜き出し方は全部で n^3 通りあるから

$$E_{\mathrm{A}}(X)=2\times\frac{1^2}{n^3}+3\times\frac{2^2}{n^3}+4\times\frac{3^2}{n^3}+\cdots+n\times\frac{(n-1)^2}{n^3}$$

$$=\frac{1}{n^3}\left\{2\cdot1^2+3\cdot2^2+4\cdot3^2+\cdots+n(n-1)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[\left\{\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right\}^2+\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\right]$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)(3n-2)}{12n^3}$$

（ⅱ）Bの場合

L の得点の期待値を $E_{\mathrm{B}}(X)$ とすると

$$E_{\mathrm{B}}(X)=\frac{1}{n^3}\times 1\times 2+\frac{1}{n^3}\times(1+1+2+2)\times 2+\frac{1}{n^3}\times(1+1+1+2+2+2+3+3+3)\times 2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n^3}\times\{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\text{ 個}}+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-1\text{ 個}}+\cdots+\underbrace{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)}_{n-1\text{ 個}}\}\times 2$$

$$=\frac{2}{n^3}\left\{1+(1+2)\times 2+(1+2+3)\times 3+\cdots+(1+2+3+\cdots(n-1))\times(n-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k(k+1)}{2}\times k\right\}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k^2$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)(3n-2)}{12n^3}$$