[東京工業大学 1985 年 $\boxed{5}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

1 から n までの整数を 1 枚に 1 つずつ書いた n 枚のカードの組を 3 組用意する。3 人がそれぞれ 1 組ずつを持ち，各人はその中から無作為に 1 枚のカードを抜き出し，そこに書かれた数によって得点を次のように A, B 2 通り定める。最大数を出した人が 1 人だけのとき，その人の得点は

A：自分の出した点　　B：他の人の出した数の和

とし，他の 2 人の得点は，A, B いずれの場合も 0 とする。最大数を出した人が 2 人以上のときは，A, B いずれの場合も，3 人の得点は 0 とする。各人の得点の期待値を，A, B それぞれの場合について，n を用いて表せ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

3 人を L, M, N とする。

L だけが最大数のカードを抜き出して得点を得るとき，その様子は次の表のようになる。

L	2	3	4	$\cdots$	n
M	1	1 or 2	1 or 2 or 3	$\cdots$	1 or 2 or $\cdots$ or $n-1$
N	1	1 or 2	1 or 2 or 3	$\cdots$	1 or 2 or $\cdots$ or $n-1$

（i）A の場合

L の得点の期待値を $E_{\mathrm{A}}(X)$ とする。

L, M, N 3 人のカードの抜き出し方は全部で n^3 通りあるから

$$E_{\mathrm{A}}(X) = 2\times\frac{1^2}{n^3} + 3\times\frac{2^2}{n^3} + 4\times\frac{3^2}{n^3} + \cdots + n\times\frac{(n-1)^2}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n^3}\left\{2\cdot1^2 + 3\cdot2^2 + 4\cdot3^2 + \cdots + n(n-1)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\left\{\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right\}^2 + \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \frac{(n-1)(n+1)(3n-2)}{12n^3}$$

（ⅱ）Bの場合

L の得点の期待値を $E_{\mathrm{B}}(X)$ とすると

$$E_{\mathrm{B}}(X)=\frac{1}{n^3}\times 1\times 2+\frac{1}{n^3}\times(1+1+2+2)\times 2+\frac{1}{n^3}\times(1+1+1+2+2+2+3+3+3)\times 2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n^3}\times\{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\text{ 個}}+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-1\text{ 個}}+\cdots+\underbrace{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)}_{n-1\text{ 個}}\}\times 2$$

$$=\frac{2}{n^3}\left\{1+(1+2)\times 2+(1+2+3)\times 3+\cdots+(1+2+3+\cdots(n-1))\times(n-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k(k+1)}{2}\times k\right\}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k^2$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)(3n-2)}{12n^3}$$