[東京工業大学 1985 年 $\boxed{4}$]

平面上の点$(0,\ 2)$を通る曲線C上の$x \neq 0$である任意の点$(x,\ y)$について，その点でのCの接線が点$\left(\dfrac{6x^3+1}{6x^2},\ 2y\right)$を通るという。この曲線の方程式を求めよ。

曲線Cの方程式を $y=f(x)$ とおく。

$x \neq 0$での任意の点$(x,\ y)$での接戦の方程式は $Y-y=f'(x)(X-x)$

これが $\left(\dfrac{6x^3+1}{6x^2},\ 2y\right)$ を通るから

$$2y-y=f'(x)\left(\frac{6x^3+1}{6x^2}-x\right) \quad \Leftrightarrow \quad y=f'(x)\cdot\frac{1}{6x^2}$$

よって $\dfrac{y'}{y}=6x^2$ から $\log|y|=2x^3+C_1$ （C_1：積分定数）

$|y|=e^{2x^3+C_1}=e^{C_1}e^{2x^3}$ より $y=\pm e^{C_1}e^{2x^3}=Ce^{2x^3}$ （$C=\pm e^{C_1}$） となる。

曲線 $y=f(x)$ は点$(0,\ 2)$を通るから $f(0)=Ce^0=2$ より $C=2$

したがって $y=2e^{2x^3}$