［ 東京工業大学 1985 年 $\boxed{3}$ ］

5 つの円 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 がある。O_1, O_2 は半径がそれぞれ 1 と a（$0<a<1$）の同心円である。O_3 は O_1 に内接し，O_2 と互いに外接する。O_4 は O_1 に内接し，O_2, O_3 と互いに外接する。O_5 は O_1 に内接し，O_3, O_4 と互いに外接する。ただし，O_2, O_3, O_4, O_5 の中心を A, B, C, D とするとき，D は B, C を通る直線に関して A の反対側にあるものとする。

(1) 四辺形 ABDC の面積 $S(a)$ を求めよ。

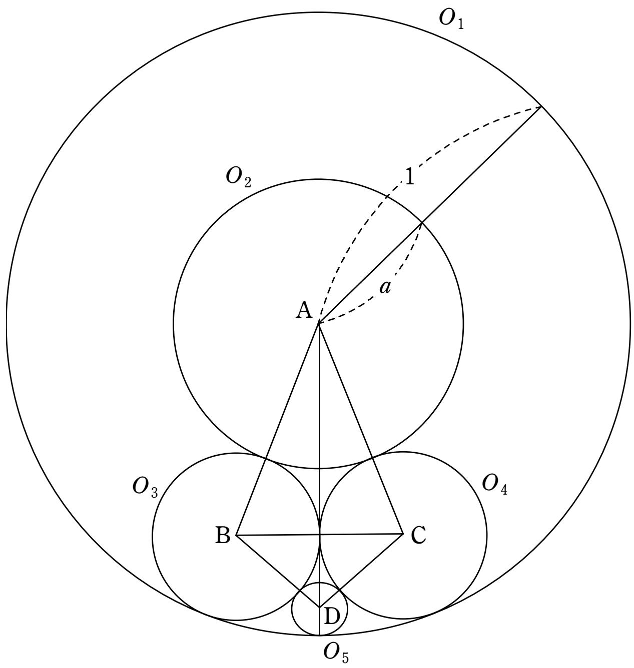
(2) $S(a)$ の最大値を求めよ。

(1) 円の位置関係は図のようになり，

A, D を結ぶ直線 AD に関して対称である。

また，線分 BC と線分 AD は直交し，

その交点 H は 2 円 $\mathrm{O_3}, \mathrm{O_4}$ の接点である。



円 $\mathrm{O_3}, \mathrm{O_4}$ の半径は $\dfrac{1-a}{2}$ であり，

三平方の定理から $\mathrm{AH}^2+\left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2=\left(a+\dfrac{1-a}{2}\right)^2$

$$\mathrm{AH}^2=a$$

$$\mathrm{AH}=\sqrt{a}$$

さらに，円 $\mathrm{O_5}$ の半径を r とすると

$$\left(r+\frac{1-a}{2}\right)^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{a}+r\right)^2$$

$$\left(1-a+2-2\sqrt{a}\right)r=\left(1-\sqrt{a}\right)^2$$

$$r=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}{3-a-2\sqrt{a}}$$

よって四辺形 ABDC の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}{3-a-2\sqrt{a}}\right\}\cdot 2\cdot\frac{1-a}{2}$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)(1-a)}{\left(3+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)(1-a)}{3+\sqrt{a}}$$

⑵ $\sqrt{a}=u$ とおくと $0<a<1$ より $0<u<1$

$S(a)=T(u)$

$$=\frac{(1+u)(1-u^2)}{3+u}$$

$$T'(u)=\frac{(1-2u-3u^2)(3+u)-(1+u-u^2-u^3)}{(3+u)^2}$$

$$=-\frac{2(u+1)(u^2+4u-1)}{(3+u)^2}$$

$T(u)$ の増減は次のようになる。

u	0	$\cdots$	$-2+\sqrt{5}$	$\cdots$	1
$T'(u)$		$+$	0	$-$	
$T(u)$		↗		↘	

$u=-2+\sqrt{5}$ のとき $T(u)$ は最大となり，そのとき $S(a)$ も最大になる。

よって 求める最大値は $T\left(-2+\sqrt{5}\right)=10\sqrt{5}-22$