



空間内において、6枚の平面 $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$ で囲まれてできる直方体を V とする。 $0 < t < 3$ である実数 t に対し、平面 $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = t$ で V を 2 分したとき、小さい方の体積（等しいときは、どちらでもよい）を $f(t)$ とする。

(1) $f(t)$ を求めよ。

(2) $f(t)$ を t の関数と考えたとき、 $t=1$ および $t=\frac{3}{2}$ で微分可能であるか。



(1) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = t$ と 6 枚の平面との位置関係は図のようになり、

$t=1, \frac{3}{2}, 2$ の前後で切り口の形が変わる。

(i) $0 < t \leq 1$ のとき、切り口は三角形になる。

$f(t)$ は三角錐の体積となるから

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2t \cdot 3t \cdot \frac{1}{3} = t^3$$

(ii) $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ のとき、切り口は六角形になる。

三角錐から直方体の外に出た部分を除けばよい。

外に出た部分は同じ形の三角錐であるから

$$f(t) = t^3 - \frac{1}{2} \cdot (t-1) \cdot 2(t-1) \cdot 3(t-1) \cdot \frac{1}{3} \times 3$$

$$= -2t^3 + 9t^2 - 9t + 3$$

(iii) $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ のとき、切り口は六角形になる。

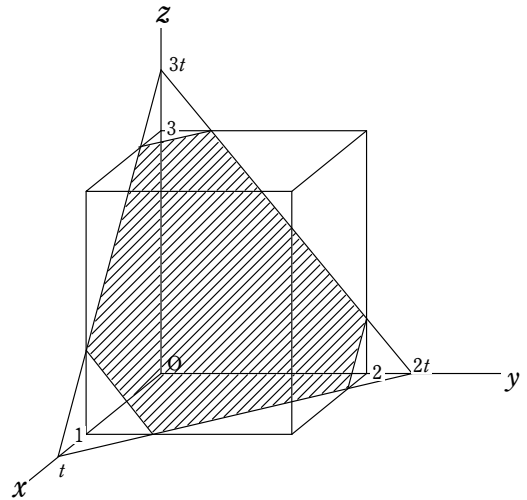
直方体から三角錐の部分を除けばよい。(ii)の結果を利用して

$$f(t) = 1 \cdot 2 \cdot 3 - (-2t^3 + 9t^2 - 9t + 3)$$

$$= 2t^3 - 9t^2 + 9t + 3$$

(iv) $2 \leq t < 3$ のとき、切り口は三角形になる。

(i)と同様にして $f(t) = \frac{1}{2} \cdot (3-t) \cdot 2(3-t) \cdot 3(3-t) \cdot \frac{1}{3} = (3-t)^3$



$$\text{以上より } f(t) = \begin{cases} t^3 & (0 < t \leq 1) \\ -2t^3 + 9t^2 - 9t + 3 & \left(1 \leq t \leq \frac{3}{2}\right) \\ 2t^3 - 9t^2 + 9t + 3 & \left(\frac{3}{2} \leq t \leq 2\right) \\ (3-t)^3 & (2 \leq t < 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t^3 - 1}{t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (t^2 + t + 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} &= \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{-2t^3 + 9t^2 - 9t + 3 - 1}{t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+0} (-2t^2 + 7t - 2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}-0} \frac{f(t) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{t - \frac{3}{2}} &= \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}-0} (-2t^2 + 6t) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}+0} \frac{f(t) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{t - \frac{3}{2}} &= \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}+0} (2t^2 - 6t) \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $f(t)$ は $t=1$ で微分可能で、 $t=\frac{3}{2}$ で微分可能でない。