[東京工業大学 1985 年 $\boxed{1}$]

2 つの条件

（i） $a^2-2b^2=1$ または $a^2-2b^2=-1$

（ii） $a+\sqrt{2}b>0$

を満たす任意の整数 $a,\ b$ から得られる実数 $g=a+\sqrt{2}b$ 全体の集合を G とする。1 より大きい G の元のうち最小のものを u とする。

(1) u を求めよ。

(2) 整数 n と G の元 g に対し，gu^n は G の元であることを示せ。

(3) G の任意の元 g は適当な整数 m によって，$g=u^m$ と書かれることを示せ。

(1) $a^2-2b^2=1$ より $\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a-\sqrt{2}b\right)=1$ …①

$a^2-2b^2=-1$ より $\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a-\sqrt{2}b\right)=-1$ …②

u は 1 より大きいので，$a+\sqrt{2}b>1$ のとき

①より $0<a-\sqrt{2}b<1$ …③

②より $-1<a-\sqrt{2}b<0$ …④

ここで，条件 $a+\sqrt{2}b>0$ より ③から $a>0$，④から $b>0$ でなければならない。

よって u は，$a=b=1$ のときで $u=1+\sqrt{2}$

(2) $g=a+\sqrt{2}b,\ h=c+\sqrt{2}d$ （$a,\ b,\ c,\ d$ は条件(i)，(ii)を満たす整数）とおく。

$$gh=\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(c+\sqrt{2}d\right)$$

$$=ac+2bd+\sqrt{2}\left(ad+bc\right)$$

であり，

$$\left(ac+2bd\right)^2-2\left(ad+bc\right)^2=a^2c^2+4abcd+4b^2d^2-2a^2d^2-4abcd-2b^2c^2$$

$$=a^2c^2+4b^2d^2-2a^2d^2-2b^2c^2$$

$$= \left(a^2 - 2b^2\right)\left(c^2 - 2d^2\right)$$

$$= \pm 1$$

$$\left(ac + 2bd\right) + \sqrt{2}\left(ad + bc\right) = \left(a + \sqrt{2}b\right)\left(c + \sqrt{2}d\right)$$

$$> 0$$

であるから， $gh \in G$ である。

また， $g^{-1} = \dfrac{1}{a + \sqrt{2}b}$

$$= \frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2}$$

$$= \pm\left(a - \sqrt{2}b\right)$$

$$= \pm a \mp \sqrt{2}b \in G$$

よって，整数 n と $g \in G$ に対して $gu^n \in G$ である。

(3) $g \in G$ である任意の g に対し，適当な整数 m をとると

$$u^{m-1} < g \leqq u^m$$

とすることができる。

両辺に $u^{-m+1} > 0$ をかけると

$$1 < gu^{-m+1} \leqq u$$

(1)より u は1より大きい G の最小の元であるから

$$gu^{-m+1} = u$$

となる。よって $g = u^m$