[東京工業大学 1984 年 $\boxed{1}$]

☆

$a,\ b$ を正の整数とする。

(1) $c=a+b,\ d=a^2-ab+b^2$ とおくとき，不等式 $1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ が成り立つことを示せ。

(2) a^3+b^3 が素数の整数乗になる $a,\ b$ をすべて求めよ。

☆

(1) $a>0,\ b>0$ より $d=(a-b)^2+ab>0$ である。

このとき，$1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4 \iff d<c^2\leqq 4d$ である。

$c^2-d=(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)$

$=3ab>0$

$4d-c^2=4(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2$

$=3a^2-6ab+3b^2$

$=3(a-b)^2\geqq 0$

等号成立は $a=b$ のとき

以上より $1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ が成り立つ。

(2) c は 2 以上の整数，d は 0 以上の整数である。

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=cd$ であるから

a^3+b^3 が素数の整数乗になるとき，p を素数として $c=p^m,\ d=p^n$ と表せる。

ただし，m は正の整数，n は 0 以上の整数である。

$1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ より $1<p^{2m-n}\leqq 4$

これを満たすのは $p=2,\ 2m-n=1$ または $p=2,\ 2m-n=2$ または $p=3,\ 2m-n=1$

のときで，それぞれ

$c=2^m,\ d=2^{2m-1}$ …①

$c=2^m,\ d=2^{2(m-1)}$ …②

$c=3^m,\ d=3^{2m-1}$ …③

となる。

また，$d=(a+b)^2-3ab=c^2-3ab$ より $3ab=c^2-d$

①のとき $3ab=2^{2m}-2^{2m-1}=2^{2m-1}$ となるが，これを満たす正の整数a, bは存在しない。

②のとき $3ab=2^{2m}-2^{2(m-1)}=3\cdot 2^{2(m-1)}$ となり，$ab=2^{2(m-1)}$ である。

a, bはtの 2 次方程式 $t^2-2^m t+2^{2(m-1)}=0$ の 2 解であり，

$(t-2^{m-1})^2=0$ より $(a, b)=(2^{m-1}, 2^{m-1})$

③のとき，$3ab=3^{2m}-3^{2m-1}=2\cdot 3^{2m-1}$ となり，$ab=2\cdot 3^{2(m-1)}$ である。

a, bはtの 2 次方程式 $t^2-3^m t+2\cdot 3^{2(m-1)}=0$ の 2 解であり，

$(t-3^{m-1})(t-2\cdot 3^{m-1})=0$ より $t=3^{m-1}, 2\cdot 3^{m-1}$

よって $(a, b)=(3^{m-1}, 2\cdot 3^{m-1}), (2\cdot 3^{m-1}, 3^{m-1})$

以上より求めるa, bは $(a, b)=(2^{m-1}, 2^{m-1}), (3^{m-1}, 2\cdot 3^{m-1}), (2\cdot 3^{m-1}, 3^{m-1})$　（mは正の整数）

[東京工業大学 1984 年 $\boxed{2}$]

☆―――☆

n を 3 以上の整数とする。

条件 $x+y+z=n,\ x\leqq y+z,\ y\leqq z+x,\ z\leqq x+y$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。

☆―――☆

$x+y+z=n$ …①

$x\leqq y+z,\ y\leqq z+x,\ z\leqq x+y$ …②

①，②より $x\leqq\dfrac{n}{2},\ y\leqq\dfrac{n}{2},\ z\leqq\dfrac{n}{2}$ …③ が成り立つ。

①かつ③を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めればよい。

（ｉ）n が奇数のとき

③より $x,\ y,\ z$ はそれぞれ最大で $\dfrac{n-1}{2}$ になることがある。

$x=1$ のとき $y+z=n-1$ であり,

このとき $y=\dfrac{n-1}{2},\ z=\dfrac{n-1}{2}$ という 1 通り。

$x=2$ のとき $y+z=n-2$ であり,

このとき $y=\dfrac{n-1}{2},\ z=\dfrac{n-3}{2}$ または $y=\dfrac{n-3}{2},\ z=\dfrac{n-1}{2}$ という 2 通り。

同様に考えて

$x=k$ $\left(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}\right)$ のとき $y+z=n-k$ であり,

このとき $y=\dfrac{n-1}{2},\ z=\dfrac{n+1}{2}-k$ または $y=\dfrac{n-1}{2}-1,\ z=\dfrac{n+1}{2}-k+1$ または

$\cdots$ または $y=\dfrac{n+1}{2}-k\left(=\dfrac{n-1}{2}-(k-1)\right),\ z=\dfrac{n-1}{2}$ という k 通り。

よって求める個数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}k=\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2}=\frac{1}{8}(n-1)(n+1)$

（ⅱ）n が偶数のとき

③より $x,\ y,\ z$ はそれぞれ最大で $\dfrac{n}{2}$ になることがある。

$x=1$ のとき　$y+z=n-1$　であり，

このとき　$y=\dfrac{n}{2},\ z=\dfrac{n}{2}-1$　または　$y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=\dfrac{n}{2}$　という 2 通り。

$x=2$ のとき　$y+z=n-2$　であり，

このとき　$y=\dfrac{n}{2},\ z=\dfrac{n}{2}-2$　または　$y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=\dfrac{n}{2}-1$　または

$y=\dfrac{n}{2}-2,\ z=\dfrac{n}{2}$ という 3 通り。

同様に考えて

$x=k\ \left(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}-1\right)$ のとき　$y+z=n-k$　であり，

このとき　$y=\dfrac{n}{2},\ z=\dfrac{n}{2}-k$　または　$y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=\dfrac{n}{2}-k+1$　または

$\cdots$　または　$y=\dfrac{n}{2}-k,\ z=\dfrac{n}{2}$　という $k+1$ 通り。

ただし，$x=\dfrac{n}{2}$ のときは　$y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=1$　または

$\cdots$　または　$y=1,\ z=\dfrac{n}{2}-1$　という　$\dfrac{n}{2}-1$　通り。

よって求める個数は

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(k+1)+\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)+1\right\}}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$$=\frac{(n-2)n}{8}+(n-2)$$

$$=\frac{(n-2)(n+8)}{8}$$

[東京工業大学 1984 年 $\boxed{3}$]

曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ を C_1 とし，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}\ (x<0)$ を C_2 とする。C_1 上に点 P_1，C_2 上に点 P_2 をとり， $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ を結ぶ直線を ℓ とする。原点を O とする。

(1) ℓ が C_1 または C_2 の接線になっているとき，$\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の面積は一定であることを示せ。

(2) $\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の面積が(1)の面積に等しいとき， ℓ は C_1 または C_2 の接線になることを示せ。

---

(1) ℓ が $\mathrm{P}_1\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)\ (\alpha>0)$ における C_1 の接線のとき，

ℓ の方程式は $y-\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) \iff y=-\dfrac{1}{\alpha^2}x+\dfrac{2}{\alpha}$

$y=-\dfrac{1}{x}$ と連立して整理すると $x^2-2\alpha x-\alpha^2=0$ であり

負の解は $x=\alpha-\sqrt{2\alpha^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha$

よって $\mathrm{P}_2\left(\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha,\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\alpha}\right)$ となる。

したがって，$\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left|\alpha\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{\alpha}-\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right|$$

$=\sqrt{2}$ （一定）となる。

ℓ が $\mathrm{P}_2\left(\beta,\ -\dfrac{1}{\beta}\right)\ (\beta<0)$ における C_1 の接線のときも同様にして，

$\mathrm{P}_1\left(\left(1-\sqrt{2}\right)\beta,\ -\dfrac{1+\sqrt{2}}{\beta}\right)$ となって $\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の面積 S が一定値 $\sqrt{2}$ であることがわかる。

(2) $\mathrm{P}_1\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right),\ \mathrm{P}_2\left(\beta,\ -\dfrac{1}{\beta}\right)\ (\alpha>0,\ \beta<0)$ とすると

$S=\sqrt{2}$ のとき

$\frac{1}{2}\left|\alpha\cdot\left(-\frac{1}{\beta}\right)-\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\right|=\sqrt{2}$　より　$\beta^2+2\sqrt{2}\alpha\beta+\alpha^2=0$

$\beta=-\sqrt{2}\alpha\pm\sqrt{\alpha^2}=\left(\pm1-\sqrt{2}\right)\alpha$

$\beta=\left(-1-\sqrt{2}\right)\alpha$　のとき　$\alpha=\left(1-\sqrt{2}\right)\beta$　であるから

$\beta=\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha$　または　$\alpha=\left(1-\sqrt{2}\right)\beta$　が成り立っている。

(1)の P_1，P_2 の座標から，ℓ は C_1 または C_2 の接線になっている。

[東京工業大学 1984 年 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────☆

定積分 $\int_0^1 e^x |x-a| dx$ を最小にする a を求めよ。

☆────────────────────────☆

$f(a)=\int_0^1 e^x |x-a| dx$ とおく。

（ｉ）$a \leqq 0$ のとき

$|x-a| \geqq |x|$ より $f(a) \geqq f(0)$ となる。

よってこのとき，$f(a)$ を最小にする a は $a=0$

（ⅱ）$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ のとき $x-a \leqq 0$，　$a \leqq x \leqq 1$ のとき $x-a \geqq 0$

であるから

$$f(a)=-\int_0^a e^x (x-a)\,dx+\int_a^1 e^x (x-a)\,dx$$

$$=-\left\{\Big[e^x (x-a)\Big]_0^a-\int_0^a e^x\,dx\right\}+\left\{\Big[e^x (x-a)\Big]_a^1-\int_a^1 e^x\,dx\right\}$$

$$=-\left\{a-(e^a-1)\right\}+\left\{e(1-a)-(e-e^a)\right\}$$

$$=2e^a-(e+1)a-1$$

となる。

ここで，$f'(a)=2e^a-(e+1)$ より $f'(a)=0$ となるのは $a=\log\dfrac{e+1}{2}$ のとき。

$1<\dfrac{e+1}{2}<e$ であるから $0<\log\dfrac{e+1}{2}<1$ となる。

よって $0 \leqq a<\log\dfrac{e+1}{2}$ のとき $f'(a)<0$

$\log\dfrac{e+1}{2}<a \leqq 1$ のとき $f'(a)>0$

（ⅲ）$a \geqq 1$ のとき

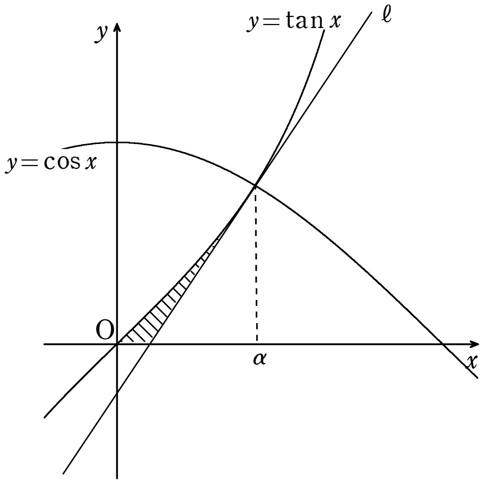
$|x-a| \geqq |x-1|$ より $f(a) \geqq f(1)$ となる。

よってこのとき，$f(a)$ を最小にする a は $a=1$

（ｉ)，（ⅱ)，（ⅲ)より，（ⅱ)の場合に $f(a)$ は最小値をとり，そのときの a は $a=\log\dfrac{e+1}{2}$ となる。

[東京工業大学 1984 年 $\boxed{5}$]

2 つの曲線 $y=\tan x,\ y=\cos x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点における曲線 $y=\tan x$ の接線を ℓ とするとき，第 1 象限にあって，ℓ と x 軸および曲線 $y=\tan x$ により囲まれる部分の面積を求めよ。



$y=\tan x$ …①，$y=\cos x$ …②

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ における①，②の交点の x 座標を α とおくと

$\tan\alpha=\cos\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

このとき，ℓ の方程式は $y-\tan\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}(x-\alpha)$

x 軸との交点は $y=0$ として $x=\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$ となる。

よって，求める面積 S は $S=\displaystyle\int_0^\alpha \tan x\,dx-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=-\log\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

ここで，$\tan\alpha=\cos\alpha \iff \sin\alpha=\cos^2\alpha \iff \sin\alpha=1-\sin^2\alpha \iff \sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$

$\sin\alpha>0$ より $\sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

また，$\sin\alpha=\cos^2\alpha$ の両辺の対数をとると $\log\sin\alpha=\log\cos^2\alpha \iff \log\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\log\sin\alpha$

したがって $S=-\log\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha$

$$=-\frac{1}{2}\log\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2}{-1+\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$