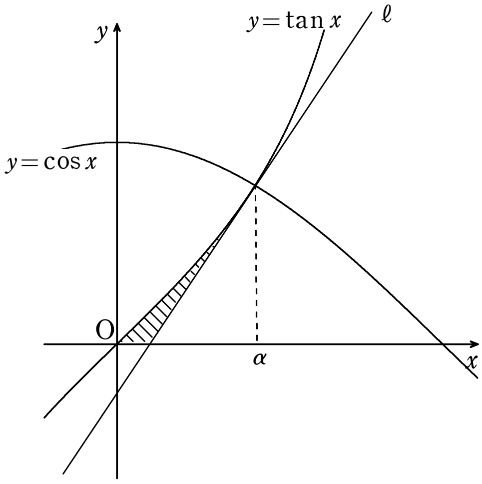
[ 東京工業大学 1984 年 $\boxed{5}$ ]

2 つの曲線 $y=\tan x,\ y=\cos x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点における曲線 $y=\tan x$ の接線を $\ell$ とするとき，第 1 象限にあって，$\ell$ と $x$ 軸および曲線 $y=\tan x$ により囲まれる部分の面積を求めよ。




$y=\tan x$ …①，$y=\cos x$ …②

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ における①，②の交点の $x$ 座標を $\alpha$ とおくと

$\tan\alpha=\cos\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

このとき，$\ell$ の方程式は $y-\tan\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}(x-\alpha)$

$x$ 軸との交点は $y=0$ として $x=\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$ となる。

よって，求める面積 $S$ は $S=\displaystyle\int_0^\alpha \tan x\,dx-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=-\log\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

ここで，$\tan\alpha=\cos\alpha\ \Leftrightarrow\ \sin\alpha=\cos^2\alpha\ \Leftrightarrow\ \sin\alpha=1-\sin^2\alpha\ \Leftrightarrow\ \sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$

$\sin\alpha>0$ より $\sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

また，$\sin\alpha=\cos^2\alpha$ の両辺の対数をとると $\log\sin\alpha=\log\cos^2\alpha\ \Leftrightarrow\ \log\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\log\sin\alpha$

したがって $S=-\log\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha$

$$=-\frac{1}{2}\log\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2}{-1+\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$