[東京工業大学 1984 年 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────────────────☆

定積分 $\int_0^1 e^x |x-a| dx$ を最小にする a を求めよ。

☆────────────────────────────────────☆

$f(a)=\int_0^1 e^x |x-a| dx$ とおく。

（ｉ）$a \leqq 0$ のとき

$|x-a| \geqq |x|$ より $f(a) \geqq f(0)$ となる。

よってこのとき，$f(a)$ を最小にする a は $a=0$

（ⅱ）$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ のとき $x-a \leqq 0$，　$a \leqq x \leqq 1$ のとき $x-a \geqq 0$

であるから

$$f(a)=-\int_0^a e^x (x-a)\,dx+\int_a^1 e^x (x-a)\,dx$$

$$=-\left\{\Big[e^x(x-a)\Big]_0^a-\int_0^a e^x\,dx\right\}+\left\{\Big[e^x(x-a)\Big]_a^1-\int_a^1 e^x\,dx\right\}$$

$$=-\left\{a-(e^a-1)\right\}+\left\{e(1-a)-(e-e^a)\right\}$$

$$=2e^a-(e+1)a-1$$

となる。

ここで，$f'(a)=2e^a-(e+1)$ より $f'(a)=0$ となるのは $a=\log\dfrac{e+1}{2}$ のとき。

$1<\dfrac{e+1}{2}<e$ であるから $0<\log\dfrac{e+1}{2}<1$ となる。

よって $0 \leqq a<\log\dfrac{e+1}{2}$ のとき $f'(a)<0$

$\log\dfrac{e+1}{2}<a \leqq 1$ のとき $f'(a)>0$

（ⅲ）$a \geqq 1$ のとき

$|x-a| \geqq |x-1|$ より $f(a) \geqq f(1)$ となる。

よってこのとき，$f(a)$ を最小にする a は $a=1$

（ｉ)，（ⅱ)，（ⅲ)より，（ⅱ)の場合に $f(a)$ は最小値をとり，そのときの a は $a=\log\dfrac{e+1}{2}$ となる。