[東京工業大学 1984 年 $\boxed{3}$]

曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ を C_1 とし，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}\ (x<0)$ を C_2 とする。C_1 上に点 P_1，C_2 上に点 P_2 をとり，P_1, P_2 を結ぶ直線を ℓ とする。原点を O とする。

(1) ℓ が C_1 または C_2 の接線になっているとき，$\triangle\mathrm{OP_1P_2}$ の面積は一定であることを示せ。

(2) $\triangle\mathrm{OP_1P_2}$ の面積が(1)の面積に等しいとき，ℓ は C_1 または C_2 の接線になることを示せ。

---

(1) ℓ が $\mathrm{P}_1\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)\ (\alpha>0)$ における C_1 の接線のとき，

ℓ の方程式は $y-\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{\alpha^2}x+\dfrac{2}{\alpha}$

$y=-\dfrac{1}{x}$ と連立して整理すると $x^2-2\alpha x-\alpha^2=0$ であり

負の解は $x=\alpha-\sqrt{2\alpha^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha$

よって $\mathrm{P}_2\left(\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha,\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\alpha}\right)$ となる。

したがって，$\triangle\mathrm{OP_1P_2}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left|\alpha\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{\alpha}-\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right|$$

$=\sqrt{2}$ （一定）となる。

ℓ が $\mathrm{P}_2\left(\beta,\ -\dfrac{1}{\beta}\right)\ (\beta<0)$ における C_1 の接線のときも同様にして，

$\mathrm{P}_1\left(\left(1-\sqrt{2}\right)\beta,\ -\dfrac{1+\sqrt{2}}{\beta}\right)$ となって $\triangle\mathrm{OP_1P_2}$ の面積 S が一定値 $\sqrt{2}$ であることがわかる。

(2) $\mathrm{P}_1\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{P}_2\left(\beta,\ -\dfrac{1}{\beta}\right)\ (\alpha>0,\ \beta<0)$ とすると

$S=\sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{1}{2}\left|\alpha\cdot\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)-\beta\cdot\dfrac{1}{\alpha}\right|=\sqrt{2}$　より　$\beta^2+2\sqrt{2}\alpha\beta+\alpha^2=0$

$\beta=-\sqrt{2}\alpha\pm\sqrt{\alpha^2}=\left(\pm1-\sqrt{2}\right)\alpha$

$\beta=\left(-1-\sqrt{2}\right)\alpha$　のとき　$\alpha=\left(1-\sqrt{2}\right)\beta$　であるから

$\beta=\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha$　または　$\alpha=\left(1-\sqrt{2}\right)\beta$　が成り立っている。

(1)の P_1，P_2 の座標から，ℓ は C_1 または C_2 の接線になっている。