[東京工業大学 1984 年 $\boxed{2}$]

☆────☆

n を 3 以上の整数とする。

条件 $x+y+z=n,\ x \leqq y+z,\ y \leqq z+x,\ z \leqq x+y$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。

☆────☆

$x+y+z=n$ …①

$x \leqq y+z,\ y \leqq z+x,\ z \leqq x+y$ …②

①，②より $x \leqq \dfrac{n}{2},\ y \leqq \dfrac{n}{2},\ z \leqq \dfrac{n}{2}$ …③ が成り立つ。

①かつ③を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めればよい。

（ⅰ）n が奇数のとき

③より $x,\ y,\ z$ はそれぞれ最大で $\dfrac{n-1}{2}$ になることがある。

$x=1$ のとき $y+z=n-1$ であり，

このとき $y=\dfrac{n-1}{2},\ z=\dfrac{n-1}{2}$ という 1 通り。

$x=2$ のとき $y+z=n-2$ であり，

このとき $y=\dfrac{n-1}{2},\ z=\dfrac{n-3}{2}$ または $y=\dfrac{n-3}{2},\ z=\dfrac{n-1}{2}$ という 2 通り。

同様に考えて

$x=k$ $\left(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}\right)$ のとき $y+z=n-k$ であり，

このとき $y=\dfrac{n-1}{2},\ z=\dfrac{n+1}{2}-k$ または $y=\dfrac{n-1}{2}-1,\ z=\dfrac{n+1}{2}-k+1$ または

… または $y=\dfrac{n+1}{2}-k\left(=\dfrac{n-1}{2}-(k-1)\right),\ z=\dfrac{n-1}{2}$ という k 通り。

よって求める個数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k=\frac{\dfrac{n-1}{2}\cdot\left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)}{2}=\frac{1}{8}(n-1)(n+1)$

（ⅱ）n が偶数のとき

③より $x,\ y,\ z$ はそれぞれ最大で $\dfrac{n}{2}$ になることがある。

$x=1$ のとき $y+z=n-1$ であり，

このとき $y=\dfrac{n}{2},\ z=\dfrac{n}{2}-1$ または $y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=\dfrac{n}{2}$ という 2 通り。

$x=2$ のとき $y+z=n-2$ であり，

このとき $y=\dfrac{n}{2},\ z=\dfrac{n}{2}-2$ または $y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=\dfrac{n}{2}-1$ または

$y=\dfrac{n}{2}-2,\ z=\dfrac{n}{2}$ という 3 通り。

同様に考えて

$x=k\ \left(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}-1\right)$ のとき $y+z=n-k$ であり，

このとき $y=\dfrac{n}{2},\ z=\dfrac{n}{2}-k$ または $y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=\dfrac{n}{2}-k+1$ または

$\cdots$ または $y=\dfrac{n}{2}-k,\ z=\dfrac{n}{2}$ という $k+1$ 通り。

ただし，$x=\dfrac{n}{2}$ のときは $y=\dfrac{n}{2}-1,\ z=1$ または

$\cdots$ または $y=1,\ z=\dfrac{n}{2}-1$ という $\dfrac{n}{2}-1$ 通り。

よって求める個数は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(k+1)+\left(\frac{n}{2}-1\right) &= \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)+1\right\}}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right) \\
&= \frac{(n-2)n}{8}+(n-2) \\
&= \frac{(n-2)(n+8)}{8}
\end{aligned}
$$