[東京工業大学 1984 年 $\boxed{1}$]

☆――☆

$a,\ b$ を正の整数とする。

(1) $c=a+b,\ d=a^2-ab+b^2$ とおくとき，不等式 $1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ が成り立つことを示せ。

(2) a^3+b^3 が素数の整数乗になる $a,\ b$ をすべて求めよ。

☆――☆

(1) $a>0,\ b>0$ より $d=(a-b)^2+ab>0$ である。

このとき，$1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4 \iff d<c^2\leqq 4d$ である。

$$c^2-d=(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)$$

$$=3ab>0$$

$$4d-c^2=4(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2$$

$$=3a^2-6ab+3b^2$$

$$=3(a-b)^2\geqq 0$$

等号成立は $a=b$ のとき

以上より $1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ が成り立つ。

(2) c は 2 以上の整数，d は 0 以上の整数である。

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=cd$ であるから

a^3+b^3 が素数の整数乗になるとき，p を素数として $c=p^m,\ d=p^n$ と表せる。

ただし，m は正の整数，n は 0 以上の整数である。

$1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ より $1<p^{2m-n}\leqq 4$

これを満たすのは $p=2,\ 2m-n=1$ または $p=2,\ 2m-n=2$ または $p=3,\ 2m-n=1$

のときで，それぞれ

$c=2^m,\ d=2^{2m-1}$ …①

$c=2^m,\ d=2^{2(m-1)}$ …②

$c=3^m,\ d=3^{2m-1}$ …③

となる。

また，$d=(a+b)^2-3ab=c^2-3ab$ より $3ab=c^2-d$

①のとき $3ab=2^{2m}-2^{2m-1}=2^{2m-1}$ となるが，これを満たす正の整数$a,\ b$は存在しない。

②のとき $3ab=2^{2m}-2^{2(m-1)}=3\cdot 2^{2(m-1)}$ となり，$ab=2^{2(m-1)}$ である。

$a,\ b$はtの 2 次方程式 $t^2-2^m t+2^{2(m-1)}=0$ の 2 解であり，

$(t-2^{m-1})^2=0$ より $(a,\ b)=(2^{m-1},\ 2^{m-1})$

③のとき，$3ab=3^{2m}-3^{2m-1}=2\cdot 3^{2m-1}$ となり，$ab=2\cdot 3^{2(m-1)}$ である。

$a,\ b$はtの 2 次方程式 $t^2-3^m t+2\cdot 3^{2(m-1)}=0$ の 2 解であり，

$(t-3^{m-1})(t-2\cdot 3^{m-1})=0$ より $t=3^{m-1},\ 2\cdot 3^{m-1}$

よって $(a,\ b)=(3^{m-1},\ 2\cdot 3^{m-1}),\ (2\cdot 3^{m-1},\ 3^{m-1})$

以上より求める$a,\ b$は $(a,\ b)=(2^{m-1},\ 2^{m-1}),\ (3^{m-1},\ 2\cdot 3^{m-1}),\ (2\cdot 3^{m-1},\ 3^{m-1})$ （m は正の整数）