[東京工業大学 1983 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

正の有理数 x を既約分数で表したとき，その分母の平方を $f(x)$ とする（自然数 n に対しては $f(x)=1$ とする)。

(1) 相異なる正の有理数 $x,\ y$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{2}{|x-y|} \leqq f(x)+f(y)$$

(2) 自然数 n に対して $x_n=\dfrac{2}{3n+4}$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 相異なる正の有理数 $x,\ y$ を既約分数で表して $x=\dfrac{n_1}{m_1},\ y=\dfrac{n_2}{m_2}$

（$m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2$ は正の整数で，$\dfrac{n_1}{m_1}\neq\dfrac{n_2}{m_2}$ を満たす）とおく。

このとき，

$$f(x)+f(y)-\frac{2}{|x-y|}=m_1{}^2+m_2{}^2-\frac{2}{\left|\dfrac{n_1}{m_1}-\dfrac{n_2}{m_2}\right|}$$

$$=m_1{}^2+m_2{}^2-\frac{2m_1m_2}{|m_2n_1-m_1n_2|}$$

$$\leqq m_1{}^2+m_2{}^2-2m_1m_2 \quad (\because\ |m_2n_1-m_1n_2|\geqq 1)$$

$$=(m_1-m_2)^2\geqq 0$$

等号成立は $|m_2n_1-m_1n_2|=1$ かつ $m_1=m_2$ のとき。

よって，$\dfrac{2}{|x-y|}\leqq f(x)+f(y)$ が成り立つ。

(2) $x_n=\dfrac{2}{3n+4}$ は n が偶数のときには分母が約分できるので，n の偶奇で場合分けする。

（ⅰ）$n=2k\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$x_n=\frac{2}{3\cdot 2k+4}=\frac{1}{3k+2} \quad \text{より}$$

$$x_{n+1}=\frac{2}{3(n+1)+4}=\frac{2}{3n+7}=\frac{2}{3\cdot 2k+7}=\frac{2}{6k+7}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|=\lim_{n\to\infty}\left\{(3k+2)^2+(6k+7)^2\right\}\left|\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{6k+7}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{45k^2+96k+53\right\}\cdot\frac{3}{18k^2+33k+14}$$

$$=3\cdot\frac{45}{18}$$

$$=\frac{15}{2}$$

（ⅱ）$n=2k-1\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

（ⅰ）と同様にして $\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|=\dfrac{15}{2}$

となる。

よって，$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x_n)+f(x_{n+1})\right\}|x_n-x_{n+1}|=\dfrac{15}{2}$

[東京工業大学 1983 年 $\boxed{2}$]

t が $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ を動くとき，t とともに変化する放物線 $y=\dfrac{1}{2}\left\{t+\dfrac{x(2-x)}{t}\right\}$ が通る点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示せよ。

$y=\dfrac{1}{2}\left\{t+\dfrac{x(2-x)}{t}\right\}$ より $t^2-2yt-x^2+2x=0$ であり，$f(t)=t^2-2yt-x^2+2x$ とおく。

$f(t)=0$ が $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲に実数解を少なくとも 1 つもつような $x,\ y$ の条件を求めればよい。

$f(t)=(t-y)^2-x^2+2x-y^2$ より 軸の方程式は $t=y$ である。

以下，軸の位置によって場合分けをする。

（ⅰ） $y\leqq 0$ のとき

$f(0)<0$ かつ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq 0$ となればよい。

よって「$-x^2+2x<0$」かつ「$\dfrac{1}{4}-y-x^2+2x\geqq 0$」

すなわち「$x<0,\ 2<x$」かつ「$y\leqq -x^2+2x+\dfrac{1}{4}$」

（ⅱ） $0<y<\dfrac{1}{4}$ のとき

$f(y)\leqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq 0$ となればよい。

よって「$-x^2+2x-y^2\leqq 0$」かつ「$\dfrac{1}{4}-y-x^2+2x\geqq 0$」

すなわち「$(x-1)^2+y^2\geqq 1$」かつ「$y\leqq -x^2+2x+\dfrac{1}{4}$」

（ⅲ） $\dfrac{1}{4}\leqq y<\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(y)\leqq 0$ かつ $f(0)>0$ となればよい。

よって「$-x^2+2x-y^2\leqq 0$」かつ「$-x^2+2x>0$」

すなわち「$(x-1)^2+y^2\geqq 1$」かつ「$0<x<2$」

(iv) $y \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

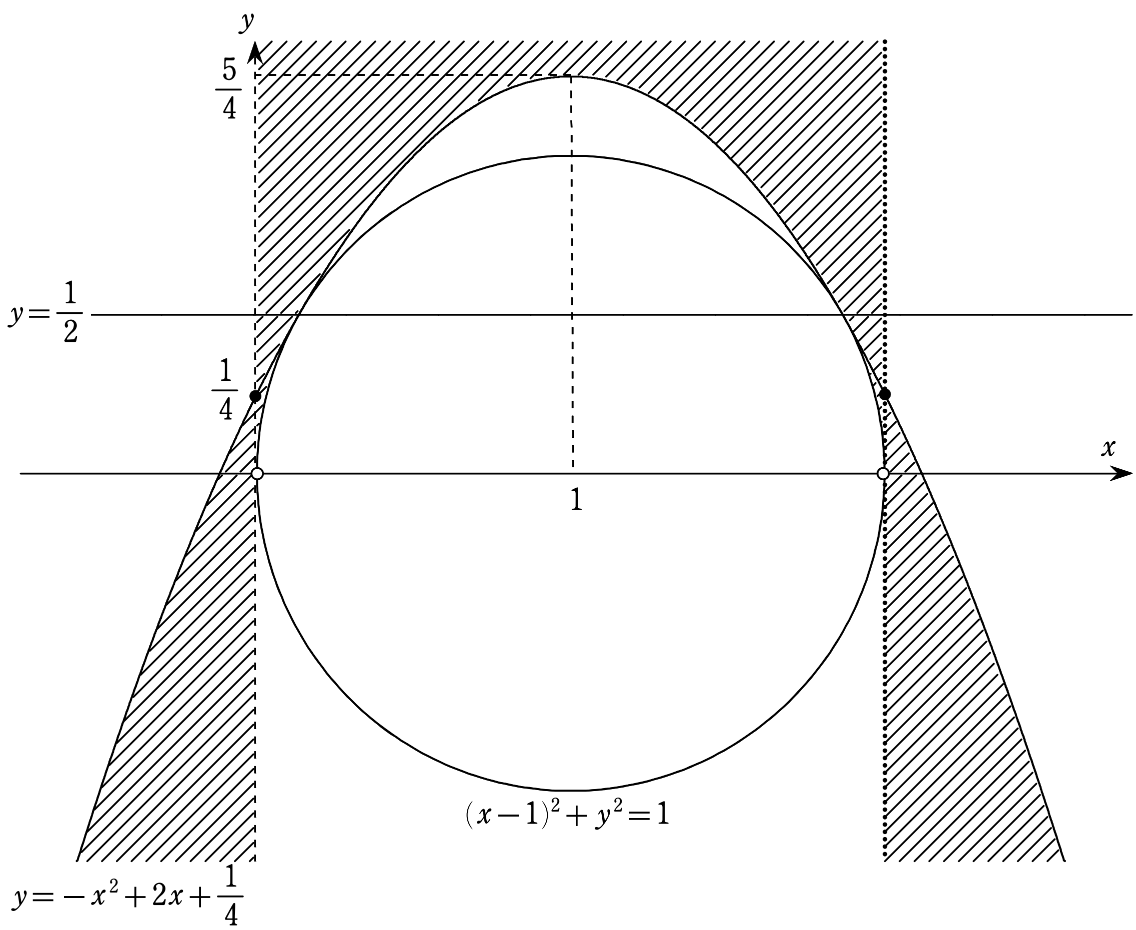
$f(0) > 0$ かつ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq 0$ となればよい。

よって「$0 < x < 2$」かつ「$y \geqq -x^2 + 2x + \dfrac{1}{4}$」

(i), (ii), (iii)を xy 平面に図示すると，下図のようになる。

ただし，境界線は実線を含み，破線を含まない。

また，境界線上の点のうち●は含み，○は含まない。



[東京工業大学 1983 年 $\boxed{3}$]

☆ ――――――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

$$A=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{3} & -\sin\dfrac{2\pi}{3}\\ \sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3}\end{pmatrix}$$ とし，ベクトル $\overrightarrow{u_n}=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次のように定義する。

$$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{u_{n-1}}+\frac{1}{2}A\left(\overrightarrow{u_{n-1}}-\overrightarrow{u_{n-2}}\right)\quad (n\geqq 3)$$

(1) $x_n,\ y_n$ を求めよ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n$ を求めよ。

☆ ――――――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

(1) $\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{u_{n-1}}+\dfrac{1}{2}A\left(\overrightarrow{u_{n-1}}-\overrightarrow{u_{n-2}}\right)$ において，n を $3,\ 4,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると

$\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{u_2}+\dfrac{1}{2}A\left(\overrightarrow{u_{n-1}}-\overrightarrow{u_1}\right)$ となる。

さらに，$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{u_n}=\dfrac{1}{2}A\overrightarrow{u_{n-1}}+\overrightarrow{u_2}$ …① を得る。

①を繰り返し用いると

$$\overrightarrow{u_n}=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}A\overrightarrow{u_{n-2}}+\overrightarrow{u_2}\right)+\overrightarrow{u_2}=\frac{1}{2^2}A^2\overrightarrow{u_{n-1}}+\frac{1}{2}A\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_2}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}}A^{n-2}\overrightarrow{u_2}+\frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}\overrightarrow{u_2}+\cdots+\frac{1}{2}A\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_2}$$

$$=\left(\frac{1}{2^{n-2}}A^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}A+E\right)\overrightarrow{u_2}\quad\cdots②$$

となる。ただし，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である。

ここで，②の両辺に $\dfrac{1}{2}A-E$ をかけて

$$\left(\frac{1}{2}A-E\right)\overrightarrow{u_n}=\left(\frac{1}{2}A-E\right)\left(\frac{1}{2^{n-2}}A^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}A+E\right)\overrightarrow{u_2}$$

$$=\left(\frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}-E\right)\overrightarrow{u_2}$$

となるので，

$$\overrightarrow{u_n}=\left(\frac{1}{2}A-E\right)^{-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}-E\right)\overrightarrow{u_2}$$

であることがわかる。

さらに，$\frac{1}{2}A-E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}$ より

$$\left(\frac{1}{2}A-E\right)^{-1}=\frac{4}{7}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -5\end{pmatrix}$$

$A^{n-1}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}^{n-1}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi & -\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\\ \sin\frac{2(n-1)}{3}\pi & \cos\frac{2(n-1)}{3}\pi\end{pmatrix}$ であることから

$$\overrightarrow{u_n}=\left(\frac{1}{2}A-E\right)^{-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}-E\right)\overrightarrow{u_2}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -5\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi & -\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\\ \sin\frac{2(n-1)}{3}\pi & \cos\frac{2(n-1)}{3}\pi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi-1 & -\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\\ \frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi & \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi-1\\ \frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi+5+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sqrt{3}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\\ -\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi+\sqrt{3}-5\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\end{pmatrix}$$

したがって，

$\overrightarrow{u_n}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ より

$$x_n=\frac{5}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{5}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\right)$$

$$y_n=\frac{\sqrt{3}}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n-1)}{3}\pi-\frac{5}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n-1)}{3}\pi\right)$$

(2) (1)の結果より $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{5}{7}$, $\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{\sqrt{3}}{7}$

[東京工業大学 1983 年 $\boxed{4}$]

A, B, C を 2 等辺 3 角形の内角とし， $F=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$ とおく。

(1) F の最大値を求めよ。

(2) F のとる値の範囲を求めよ。

---

(1) $B=C=\theta$ とおくと， $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり

$F=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$

$=\sin 3(\pi-2\theta)+\sin 3\theta+\sin 3\theta$

$=\sin 6\theta+2\sin 3\theta$

となる。

$F'=6\cos 6\theta+6\cos 3\theta$

$=6\left(2\cos^2 3\theta-1+\cos 3\theta\right)$

$=6(2\cos 3\theta-1)(\cos 3\theta+1)$

より $F'=0$ となるのは $\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}, -1$ のときで，

$0<3\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ より $3\theta=\dfrac{\pi}{3}, \pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{\pi}{3}$ のとき。

よって， F の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{9}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
F'	／	＋	0	－	0	－	／
F	／	↗	極大	↘		↘	／

したがって， F は $\theta=\dfrac{\pi}{9}$ のときに最大になり，

最大値は $F\Big|_{\theta=\frac{\pi}{9}}=\sin\dfrac{2\pi}{3}+2\sin\dfrac{\pi}{3}\ =\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $\theta \to 0$ のとき $F \to 0$, $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき $F \to -2$ であるから

$$-2 < F \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

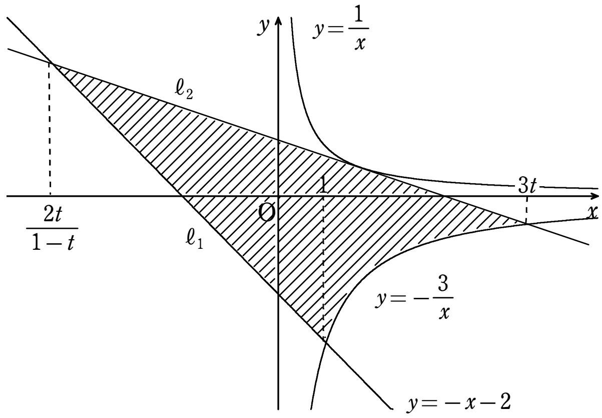
[東京工業大学 1983 年 $\boxed{5}$]

直線 $y=-x-2$ を ℓ_1 とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>1)$ における接線を ℓ_2 とする。曲線 $y=-\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 とで囲まれる部分の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ の最小値を求めよ。

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>1)$ における接線 ℓ_2 の方程式は $y-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$ である。

この ℓ_2 が直線 $\ell_1 : y=-x-2$，曲線 $y=-\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ と交わる点の座標は

$\left(\dfrac{2t}{1-t},\ \dfrac{-2}{1-t}\right)$，$\left(3t,\ -\dfrac{1}{t}\right)$ である。



また，直線 ℓ_1 が曲線 $y=-\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ と交わる点の

座標は $(1,\ -3)$ であるから，

求める面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\int_{\frac{2t}{1-t}}^{1}\left\{-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}-(-x-2)\right\}dx+\int_{1}^{3t}\left\{-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}-\left(-\frac{3}{x}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{t^2}+1\right)\cdot\frac{x^2}{2}+\left(\frac{2}{t}+2\right)x\right]_{\frac{2t}{1-t}}^{1}+\left[-\frac{x^2}{2t^2}+\frac{2}{t}x+3\log|x|\right]_{1}^{3t}$$

$$=4+\frac{2(t+1)}{t-1}+3\log 3t$$

これより

$$S'(t)=2\cdot\frac{1\cdot(t-1)-(t+1)\cdot 1}{(t-1)^2}+3\cdot\frac{1}{3t}\cdot 3=\frac{-4}{(t-1)^2}+\frac{3}{t}=\frac{3t^2-10t+3}{t(t-1)^2}=\frac{(3t-1)(t-3)}{t(t-1)^2}$$

となる。よって，$t>1$ において $S(t)$ は $t=3$ のときに極小かつ最小となる。

したがって 最小値は $S(3)=8+6\log 3$