

[東京工業大学 1983 年 1]



正の有理数 x を既約分数で表したとき、その分母の平方を $f(x)$ とする（自然数 n に対しては $f(x)=1$ とする）。

(1) 相異なる正の有理数 x, y に対して、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{2}{|x-y|} \leq f(x) + f(y)$$

(2) 自然数 n に対して $x_n = \frac{2}{3n+4}$ とするとき、次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n) + f(x_{n+1})\} |x_n - x_{n+1}|$$



[東京工業大学 1983 年 2]



t が $0 < t \leq \frac{1}{2}$ を動くとき、 t とともに変化する放物線 $y = \frac{1}{2} \left\{ t + \frac{x(2-x)}{t} \right\}$ が通る点 (x, y) 全体

の集合を図示せよ。





$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \text{ とし, ベクトル } \vec{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, \dots) \text{ を次のように定義する。}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_n = \vec{u}_{n-1} + \frac{1}{2} A(\vec{u}_{n-1} - \vec{u}_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

(1) x_n, y_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。



[東京工業大学 1983 年 4]



A, B, C を 2 等辺 3 角形の内角とし, $F = \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$ とおく。

(1) F の最大値を求めよ。

(2) F のとる値の範囲を求めよ。



[東京工業大学 1983 年 5]



直線 $y = -x - 2$ を l_1 とし, 曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ($t > 1$) における接線を l_2 とする。曲線

$y = -\frac{3}{x}$ ($x > 0$) と 2 直線 l_1, l_2 とで囲まれる部分の面積を $S(t)$ とするとき, $S(t)$ の最小値を求めよ。

